ECUACIÓN DE LA ELÁSTICA DE UNA VIGA
OBTENCIÓN POR EL MÉTODO DE LA DOBLE INTEGRACIÓN

Para desarrollar la expresión de la ecuación diferencial de la elástica de una viga, estudiaremos una viga cargada como la de la figura 1, con un sistema de ejes en el que el eje y es positivo hacia arriba y el eje x es positivo hacia la derecha. Consecuentemente, el eje z es positivo en la dirección saliente del plano del papel y serán positivos los giros en sentido antihorario. El motivo de cargarla según se ve en la figura es que las deformaciones producidas por la carga resulten positivas aunque en la realidad una carga así sea difícil de encontrar.

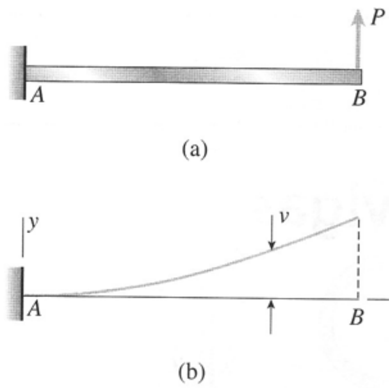


Figura 1 Curva de deflexión de una viga en voladizo.

Llamaremos deflexión v al desplazamiento de cualquier punto sobre el eje de la viga. Como el eje y es positivo hacia arriba, las deflexiones serán también positivas hacia arriba.
Para obtener la ecuación de la elástica, que representa la deflexión de cualquier punto de la viga, tenemos que ser capaces de expresar la deflexión en función de la coordenada x. Para ello nos fijaremos en la figura 2.

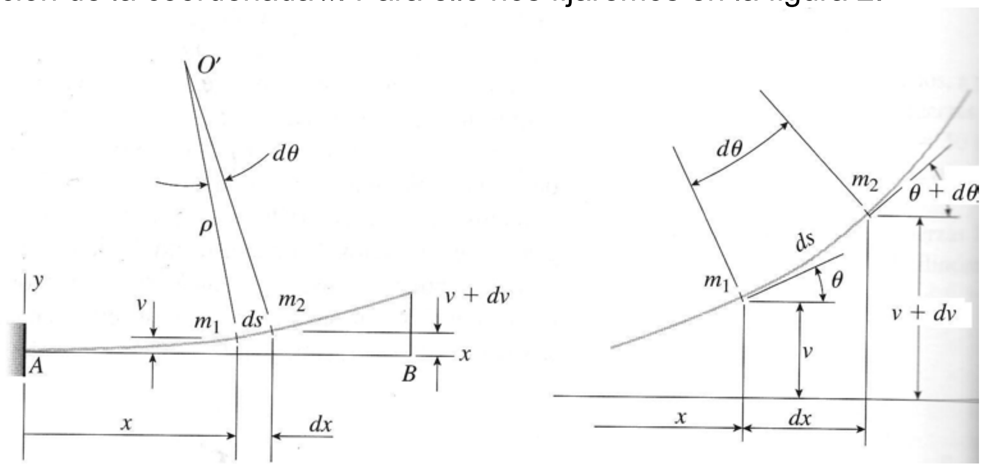


Figura 2 Deflexión y ángulo de rotación de una viga.

La deflexión de un punto genérico $\mathbf{m_1}$ será la distancia desde la deformada al eje de abscisas, v. Si tomamos otro punto $\mathbf{m_2}$ infinitesimalmente próximo al anterior (su abscisa será $x+dx$), su deflexión será muy parecida a la de $\mathbf{m_1}$, pero habrá variado un poco (otra cantidad infinitesimal), dv, que se corresponde con el incremento de la deflexión conforme avanzamos a lo largo de la curva desde **m₁** a **m₂**. La deflexión de este segundo punto será $v + dv$.

Al flexionarse la viga, cada uno de sus puntos realiza dos movimientos:

a) Se desplaza una cantidad v según hemos visto.
b) Gira un cierto ángulo.

Llamaremos ***ángulo de rotación***, θ, del eje de la viga al ángulo entre el eje *x* y la tangente a la curva de deflexión en un punto[1]. Así, nuestro punto $\mathbf{m_1}$ tendrá un ángulo de rotación θ. El punto $\mathbf{m_2}$ habrá girado un poco más, en concreto una cantidad diferencial $d\theta$ [2], con lo que su ángulo de rotación será $\theta+d\theta$.

Por otro lado, si trazamos las normales a las tangentes de los dos puntos, dichas normales formarán un ángulo entre sí de valor $d\theta$ y se cortarán en el punto O', que se denomina centro de curvatura. Asimismo, la distancia desde O' a la curva es el radio de curvatura ρ.

De esta manera, al ser el arco igual al ángulo por el radio, podemos escribir:

$$\rho d\theta = ds$$

donde ds es la distancia que separa los dos puntos, recorrida a lo largo de la curva. Entonces, la curvatura κ, que es la inversa del radio de curvatura, se expresa mediante la ecuación

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}$$ [3]

Puesto que se trata de pequeñas deformaciones, el ángulo se confunde con su tangente y podemos aproximar el arco de la curva ds con el avance en el eje x, dx

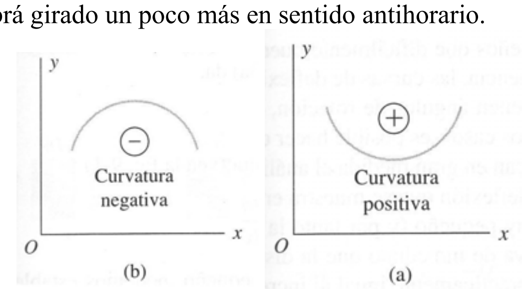
$$\theta \approx \tan\theta \qquad ds \approx dx$$

De igual modo, observando la geometría de la viga, podemos escribir la tangente del ángulo de rotación (y, por tanto, el ángulo puesto que se confunden) como

$$\theta \approx \tan\theta = \frac{dv}{dx}$$

[1] Hay que recordar que con nuestro sistema de ejes, el ángulo de rotación será positivo cuando refleje un giro en sentido antihorario.

[2] Positivo puesto que habrá girado un poco más en sentido antihorario.



[3] La curvatura es positiva cuando el ángulo de rotación aumenta conforme nos movemos a lo largo de la pendiente de la viga en dirección *x* positiva, según se observa en las figuras anteriores.

Entonces podemos volver a escribir la ecuación de la curvatura como

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d\left(\frac{d\nu}{dx}\right)}{dx} = \frac{d^2\nu}{dx^2}$$

Hay que recordar que al hacer el estudio en el que obtuvimos la *ley de Navier*, habíamos obtenido una expresión para la curvatura:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M_F}{EI}$$

Igualando ambas expresiones de la curvatura obtenemos la ecuación diferencial de la elástica de una viga:

$$\frac{d^2\nu}{dx^2} = \frac{M_F}{EI}$$

Esta ecuación la podremos integrar dos veces para encontrar la deflexión ν con la condición de que el momento flector y el momento de inercia[4] estén escritos en función de la coordenada x.

[4] En ocasiones, cuando la sección de la viga varía a lo largo del eje x, varía también la expresión del momento de inercia. Habrá que encontrar una expresión de dicho momento en la que $I = I(x)$.