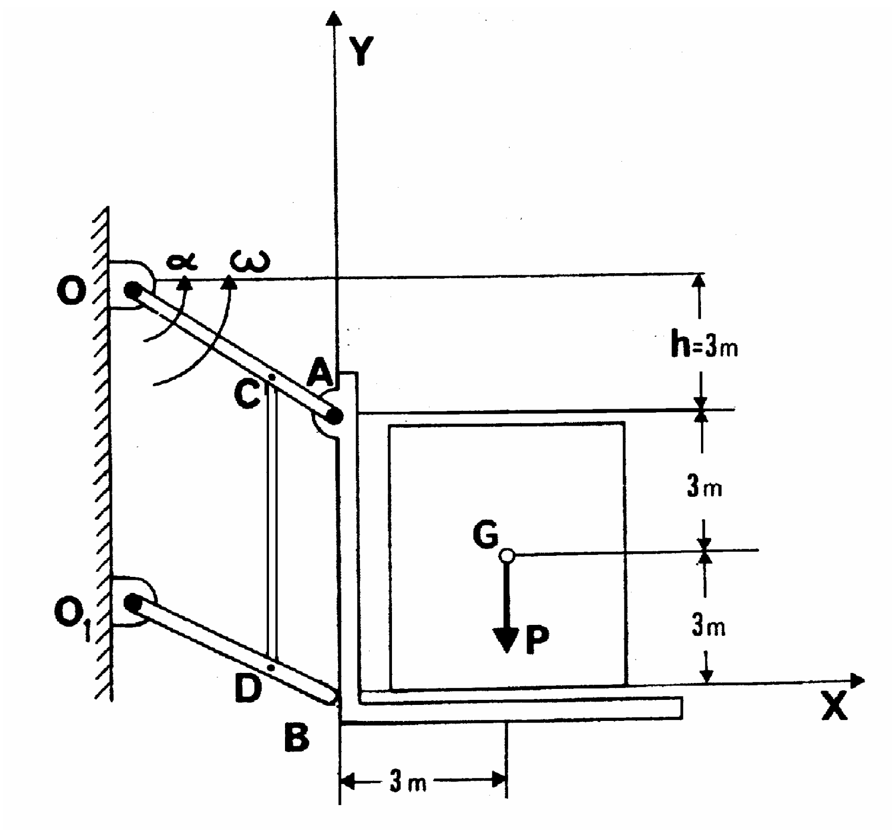
Junio de 2001

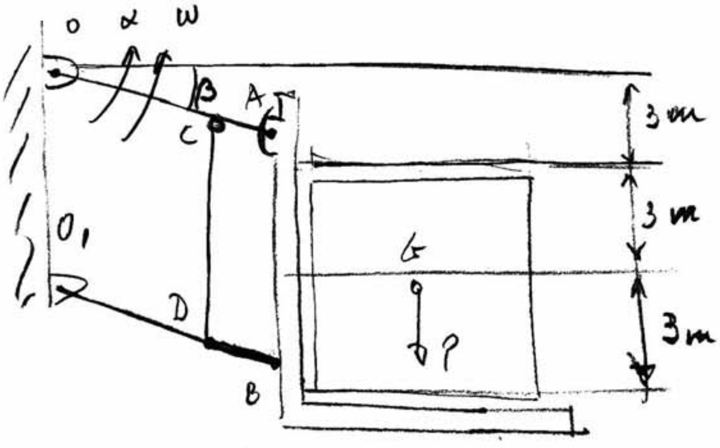
El mecanismo de la figura consta de dos barras, *OA* y O_1B, iguales y paralelas, conectadas por la barra vertical *CD* y una plataforma articulada, todo ello sin peso. El giro de la barra *OA* provoca la elevación de un peso $P = 100\ Kg$.

En el instante en que $h = 3\ m$. la barra *OA* tiene una velocidad angular ω=4 rad/s. y aceleración angular α=10 rad/s^2.

Hallar, en el instante considerado, las componentes, según los ejes *x* e *y*, de las reacciones en *A* y *B*. Obtener también el valor del par motor aplicado en *O* necesario para obtener dicho movimiento. $OA = O_1B = 5\ m$.



$$\overline{OA} = \overline{O_1B} = 5\,m$$



Al moverse siempre paralelas, las barras OA y O_1B, los puntos A y B tendrán las mismas velocidades y aceleraciones.
Entonces, el movimiento de la plataforma es una traslación y todos sus puntos tendrán las mismas velocidades y aceleraciones.

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{3}{5} \rightarrow \beta = 36'869$$

$$\cos\beta = \frac{4}{5}$$

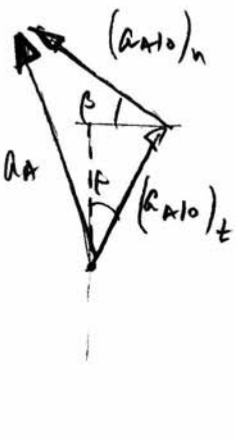
Calculando la aceleración del punto A:

$$a_A = \vec{a}_0 + (a_{A/0})_t + (a_{A/0})_n$$

$\vec{0}$ $\quad$ $\alpha . OA$ $\quad$ $// OA$, $\omega^2 . OA$

$$\alpha . OA = 10 . 5 = 50\ m/s^2 \qquad \omega^2 . OA = 4^2 . 5 = 80\ m/s^2$$

sus componentes horizontal y vertical son:



$$a_{Ax} = (a_{A/0})_t \operatorname{sen}\beta - (a_{A/0})_n \cos\beta$$

$$= 50 . \frac{3}{5} - 80 . \frac{4}{5} = 30 - 64 = -34\ m/s^2$$

$$a_{Ay} = (a_{A/0})_t \cos\beta + (a_{A/0})_n \operatorname{sen}\beta$$

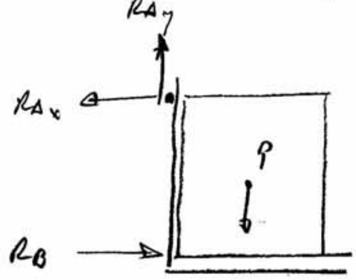
$$= 50 . \frac{4}{5} + 80 . \frac{3}{5} = 40 + 48 = 88\ m/s^2$$

$P = 100\ kg = 981\ N$

$a_{G_x} = -34\ m/sg^2$

$a_{G_y} = 88\ m/sg^2$

Aislando la plataforma, se pueden aplicar las ecuaciones de Newton-Euler



$\Sigma F_x = m a_{Gx}$

$R_B - R_{Ax} = 100 . (-34) = -3400 \quad (1)$

$\Sigma F_y = m a_{Gy}$

$R_{Ay} - P = 100\ (88) = 8800$

$\boxed{R_{Ay} = 981 + 8800 = 9781\ N = 997'04\ kg.}$

$\Sigma N_G = I_G . \alpha = 0$

$R_B . 3 + R_{Ax} . 3 - R_{Ay} . 3 = 0$

$R_B + R_{Ax} - R_{Ay} = 0$

$R_B = R_{Ay} - R_{Ax} \quad (3)$

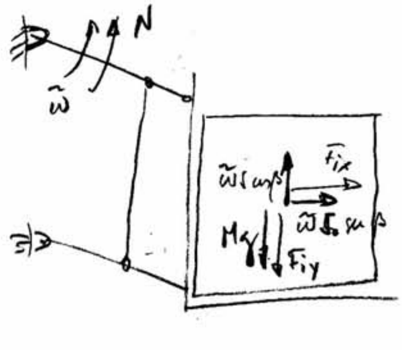
Introduciendo (3) en (1)

$R_{Ay} - 2 R_{Ax} = -3400$

$\boxed{R_{Ax} = \frac{3400 + R_{Ay}}{2} = 6590'5\ N = 671'81\ kg.}$

De (3) $\boxed{R_B = 9781 - 6590'5 = 3190'5\ N = 325'23\ kg.}$

Par motor (por potencias virtuales).



$F_{ix} = - m a_{G_x} = -100 . (-34) = 3400\ N$

$F_{iy} = - m a_{G_y} = -100\ (88) = -8800\ N$

$N \tilde{\omega} + F_{ix} . \tilde{\omega} 5 \sin\beta - (F_{iy} + mg) \tilde{\omega} 5 \cos\beta = 0$

$N = 5 \left[(F_{iy} + mg) \cos\beta - F_{ix} \sin\beta \right] = 0$

$N = 5 \left((8800 + 981) \frac{4}{5} - 3400 \frac{3}{5} \right) = 28924\ N.m$

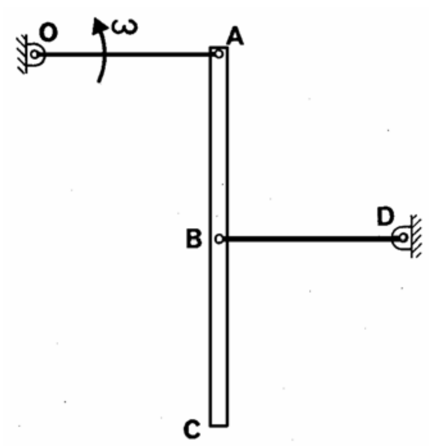
$\boxed{N = 28924{,}0\ Nm = 2951'42\ kg.m}$

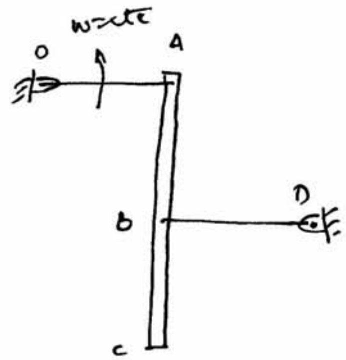
Septiembre de 2001

El mecanismo de la figura está situado en un plano vertical. La barra *AC* tiene masa *M*. Las otras dos barras carecen de masa. Se verifica: *OA*=*AB*=*BC*=*BD*=*L*.

Por una acción exterior no indicada, la barra *OA* se mueve con velocidad angular uniforme ω.

Se pide calcular las reacciones en las articulaciones *A* y *B* y el par motor que se debe imprimir a la barra *OA*, en el instante en que la barra *AC* está en posición vertical, tal como se representa en la figura.



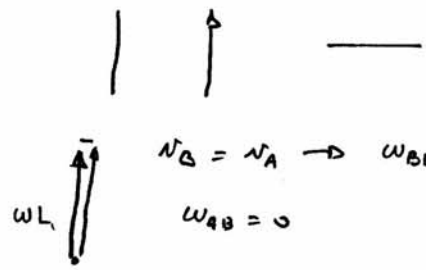


Cinemática

Velocidad

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \omega_{AB} \cdot AB$$

$$? \qquad \omega L \qquad ?$$



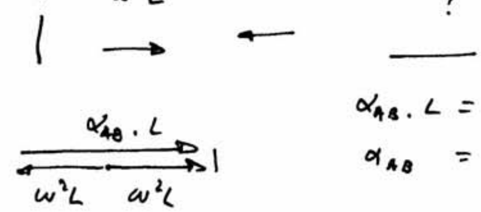
$$v_B = v_A \rightarrow \omega_{BD} = \frac{v_B}{L} = \omega \text{ entrante}$$

$$\omega_{AB} = 0$$

Aceleración

$$a_B = a_A + a_{B/A}$$

$$a_B: \; t \; (?), \quad n \; (\omega^2 L) \qquad a_A: \; \omega^2 L \qquad a_{B/A}: \; t \; (?), \quad n \; (\omega_{AB}^2 L = 0)$$

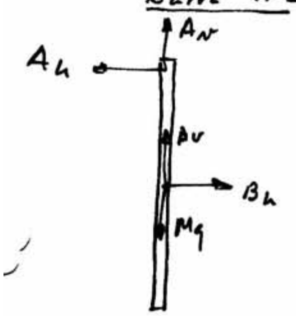


$$\alpha_{AB} \cdot L = 2\omega^2 L \qquad \alpha_{BD} = 0$$

$$\alpha_{AB} = 2\omega^2 \text{ saliente}$$

Dinámica

Barra AB



$$\Sigma F_x = m a_{G_x} \rightarrow B_h - A_h = M\omega^2 L \qquad (1)$$

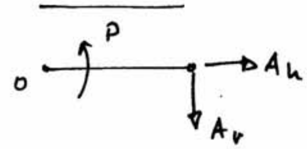
$$\Sigma F_y = m a_{G_y} \rightarrow A_v + B_v - Mg = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma N_G = J_G \alpha \rightarrow -A_h \cdot L = -\frac{1}{12} M (2L)^2 \cdot 2\omega^2 \qquad (3)$$

$$\boxed{A_h = \frac{2}{3} M L \omega^2}$$

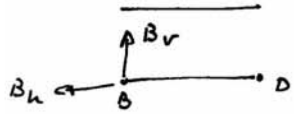
De (1) $\boxed{B_h = M\omega^2 L + A_h = \frac{5}{3} M L \omega^2}$

Barra OA



$$\Sigma N_O = I_O \cdot \alpha = 0 \quad (I=0) \rightarrow P - A_v \cdot L = 0 \qquad (4)$$

Barra BD



$$\Sigma N_D = 0 \qquad B_v \cdot L = 0 \rightarrow \boxed{B_v = 0} \quad (5)$$

De (2) $\boxed{A_v = Mg}$

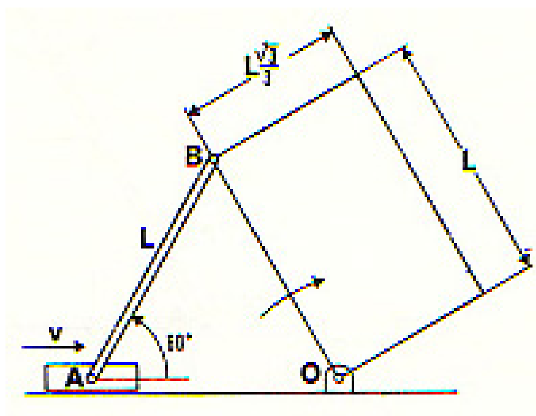
De (4) $\boxed{P = MgL}$

Junio 2002

En el mecanismo de la figura está situado en un plano vertical. La placa, de dimensiones L y $L\frac{\sqrt{3}}{3}$, tiene masa *M*: está articulada en *B* a una barra *AB* de longitud también *L* y sin masa. El extremo *A* de la barra se mueve horizontalmente, impulsado por una fuerza no indicada, de forma que su velocidad tiene un valor constante conocido, *v*, cuando *AB* forma 60º con la horizontal.

Hallar para esta posición:

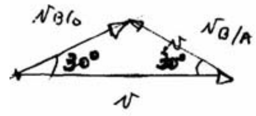
a) El valor de la velocidad angular de la placa.
b) El valor de la aceleración angular de la placa, así como la aceleración de su centro de gravedad.
c) El módulo de la fuerza que la barra ejerce sobre la placa y las reacciones en *O*.



Cinemática

Calculemos la velocidad de B como perteneciente a la placa y al sólido AB. La velocidad de A es conocida.

$$\vec{v}_B = \underset{v \rightarrow}{\vec{v}_A} + \underset{\perp AB\ ?}{\vec{v}_{B/A}} = \underset{\perp OB}{\vec{v}_{B/O}}$$



$$v_{B/O} = v_{B/A} = \frac{\sqrt{3}}{3} v$$

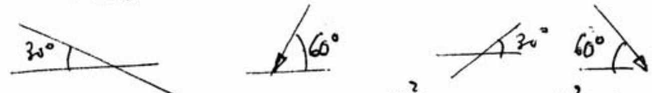
$$2\, v_{B/O} \cos 30 = v$$

$$v_{B/O} = \frac{v}{2\,\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}\, v}{3}$$

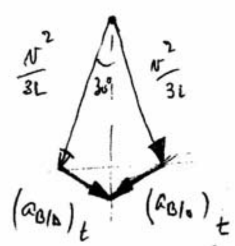
$$\omega_{BO} = \frac{v_{B/O}}{L} = \frac{\sqrt{3}\, v}{3L} \quad \text{entrante}$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_{B/A}}{L} = \frac{\sqrt{3}\, v}{3L} \quad \text{saliente}$$

$$\vec{a}_B = \cancel{\vec{a}_A}^{\,0} + \underset{\perp AB}{\left(\vec{a}_{B/A}\right)_t} + \underset{/\!/ AB}{\left(\vec{a}_{B/A}\right)_n} = \underset{\perp OB}{\left(a_{B/O}\right)_t} + \underset{/\!/ OB}{\left(a_{B/O}\right)_n}$$



$$\omega_{AB}^2 \cdot L = \frac{v^2}{3L} \qquad \omega_{OB}^2 \cdot L = \frac{v^2}{3L}$$



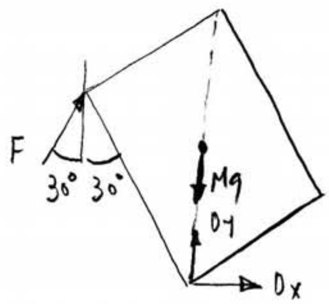
$$\frac{v^2}{3L} \sin 30 = \left(a_{B/A}\right)_t \cdot \cos 30$$

$$\left(a_{B/A}\right)_t = \frac{\frac{v^2}{3L} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{v^2}{3\sqrt{3}\, L} = \frac{\sqrt{3}\, v^2}{9L} = \left(a_{B/O}\right)_t$$

$$\alpha_{AB} = \frac{\sqrt{3}\, v^2}{9L^2} \quad \text{entrante} \qquad \alpha_{OB} = \frac{\sqrt{3}\, v^2}{9L^2} \quad \text{saliente}$$

Dinámica

Aislamos la placa. Al no tener masa, la barra AB transmitirá las fuerzas según su propia dirección



$$\sum \vec{M}_O = I_O \vec{\alpha}$$

$$F \cos 30\, L = -\frac{4}{9} ML^2 \cdot \frac{\sqrt{3}\, v^2}{9L^2}$$

$$F = -\frac{8Mv^2}{81L}$$

Calculemos la aceleración del centro de gravedad de la placa.

$$a_G = (a_{G/O})_n + (a_{G/O})_t \qquad OG = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} L$$

$$\omega^2 OG = \frac{\sqrt{3}\, v^2}{9L} \qquad \alpha\, OG = \frac{v^2}{9L^2}$$

$$\sum F_x = M a_{Gx}$$

$$F \operatorname{sen} 30 + O_x = -\frac{Mv^2}{9L}$$

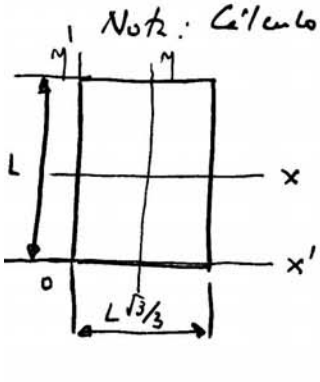
$$O_x = -\frac{Mv^2}{9L} + \frac{4Mv^2}{81L} = -\frac{5Mv^2}{81L}$$

$$\sum F_y = M a_{Gy}$$

$$F \cos 30 + O_y - Mg = -\frac{M\sqrt{3}\, v^2}{9L}$$

$$O_y = Mg - \frac{M\sqrt{3}\, v^2}{9L} + \frac{8Mv^2}{81L} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = Mg - \frac{5\sqrt{3}\, Mv^2}{81L}$$

Nota: Cálculo del momento de inercia



$$I_x = \frac{1}{12} ML^2$$

$$I_{x'} = I_x + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

$$I_y = \frac{1}{12} M \left(\frac{L\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{36} ML^2$$

$$I_{y'} = I_y + M\left(\frac{L\sqrt{3}}{3 \cdot 2}\right)^2 = \frac{1}{9} ML^2$$

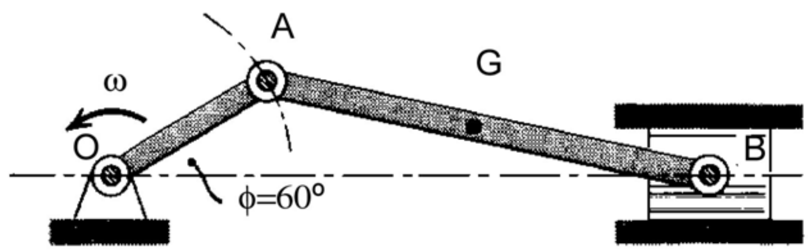
$$I_O = I_{x'} + I_{y'} = \frac{4}{9} ML^2$$

Septiembre 2002

El mecanismo biela-manivela de la figura arrastra un pistón de masa 3M. La biela tiene longitud $\sqrt{3}L$ y masa 2M. La longitud de la manivela es L y su masa M. La manivela es accionada por un mecanismo exterior no indicado y gira con una velocidad constante ω.

En el instante en que φ=60º, obtener:

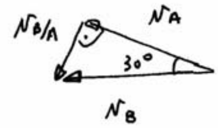
a) Las reacciones en el pasador que articula la biela y el pistón.
b) El par motor necesario en ese instante para mantener la velocidad indicada.



Cinematica

$v_B = v_A + v_{B/A}$

?



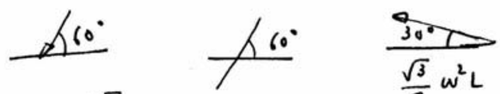
$\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{v_A}{v_B} \to \boxed{v_B = \frac{2\sqrt{3}}{3} v_A = \frac{2\sqrt{3}}{3} \omega L}$

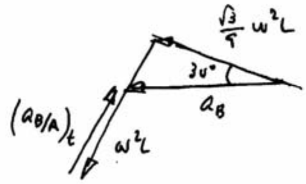
$\cos 60 = \frac{1}{2} = \frac{v_{B/A}}{v_B} \to \boxed{v_{B/A} = \frac{v_B}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \omega L}$

$\omega_{AB} \cdot \sqrt{3} L = \frac{\sqrt{3}}{3} \omega L \to \boxed{\omega_{AB} = \frac{\omega}{3} \text{ entrante}}$

$$a_B = (\cancel{a_{A/O}})_t^{\,0} + (a_{A/O})_n + (a_{B/A})_t + (a_{B/A})_n$$

a_B	$(a_{A/O})_t$	$(a_{A/O})_n$	$(a_{B/A})_t$	$(a_{B/A})_n$
?	$\alpha_{OA} = 0$	$/\!/ AO$	$\perp AB$	$/\!/ AB$
		$\omega^2 L$	?	$\omega_{AB}^2 \cdot AB$





$a_B \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{9} \omega^2 L \to \boxed{a_B = \frac{2}{9} \omega^2 L}$

$\omega^2 L - (a_{B/A})_t = a_B \sin 30 = \frac{\omega^2 L}{9}$

$\boxed{(a_{B/A})_t = \frac{8}{9} \omega^2 L}$ $\boxed{\alpha_{AB} = \frac{(a_{B/A})_t}{\sqrt{3} L} = \frac{8\sqrt{3}}{27} \omega^2 \text{ rad}}$

$$a_G = a_A + (a_{G/A})_t + (a_{G/A})_n$$

$\frac{\omega^2}{9}\frac{\sqrt{3}L}{2}$

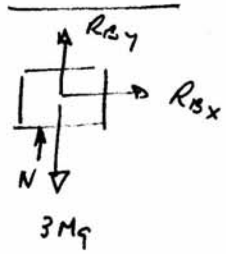
$$\frac{8\sqrt{3}\,\omega^2}{27}\frac{\sqrt{3}L}{2} = \frac{4}{9}\omega^2 L$$

$$\boxed{a_{Gy} = \frac{5}{9}\omega^2 L\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\omega^2\sqrt{3}L}{36} = \frac{9\sqrt{3}L}{36}\omega^2 = \frac{\sqrt{3}L}{4}\omega^2 L \downarrow}$$

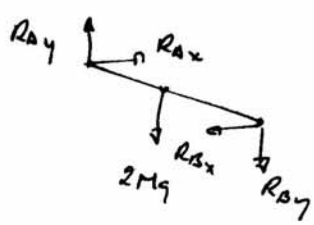
$$\boxed{a_{Gx} = \frac{5}{9}\omega^2 L\frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{9}\frac{\sqrt{3}L}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{13}{36}\omega^2 L \leftarrow}$$

Dinámica

$$\Sigma F_x = M a_x \rightarrow \boxed{R_{Bx} = -3M\frac{2}{9}\omega^2 L = -\frac{2}{3}M\omega^2 L}$$



$$\Sigma F_y = M a_y \rightarrow R_{By} + N - 3Mg = 0$$



$$\Sigma F_x = M a_{Gx} \rightarrow R_{Ax} - R_{Bx} = -2M\frac{13}{36}\omega^2 L$$

$$\boxed{R_{Ax} = -2M\frac{13}{36}\omega^2 L - \frac{2}{3}M\omega^2 L = -\frac{25}{18}M\omega^2 L}$$

$$\Sigma F_y = M a_{Gy} \rightarrow R_{Ay} - R_{By} - 2Mg = -2M\frac{\sqrt{3}}{4}\omega^2 L$$

$$\Sigma M_G = I_G \cdot \alpha \qquad \boxed{I_G = \frac{1}{12}2M(\sqrt{3}L)^2 = \frac{6}{12}ML^2 = \frac{1}{2}ML^2}$$

$$(R_{Ay} + R_{By})\cos 30 + (R_{Ax} + R_{Bx})\sin 30 = \frac{1}{2}ML^2\frac{8\sqrt{3}}{27}\omega^2$$

$$(R_{Ay} + R_{By})\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(-\frac{25}{18}M\omega^2 L - \frac{2}{3}M\omega^2 L\right)\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{27}M\omega^2 L$$

$$(R_{Ay} + R_{Ay})\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{25}{18}M\omega^2 L - \frac{2}{3}M\omega^2 L\right)\frac{1}{2} = \frac{4}{27}M\omega^2 L$$

$$(R_{Ay} + R_{By})\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{37}{36}M\omega^2 L = \frac{4}{27}M\omega^2 L$$

$$R_{Ay} + R_{By} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{127}{108}M\omega^2 L = \frac{127\sqrt{3}}{162}M\omega^2 L$$

Cálculo del par motor.

$$\Sigma N_0 = I_0 \cdot \alpha$$

$$-Mg\frac{L}{2}\cos 60 + R_{Ax} \cdot L \sin 60 - R_{Ay} L \cos 60 + T = 0 \quad (\alpha = 0)$$

$$T = \left(R_{Ay} + \frac{1}{2} Mg\right) L \cos 60 - R_{Ax} L \sin 60$$

$$T = \left(\frac{41}{54}\sqrt{3}\, M\omega^2 L + \frac{3}{2} Mg\right)\frac{L}{2} + \frac{25}{18} M\omega^2 L^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

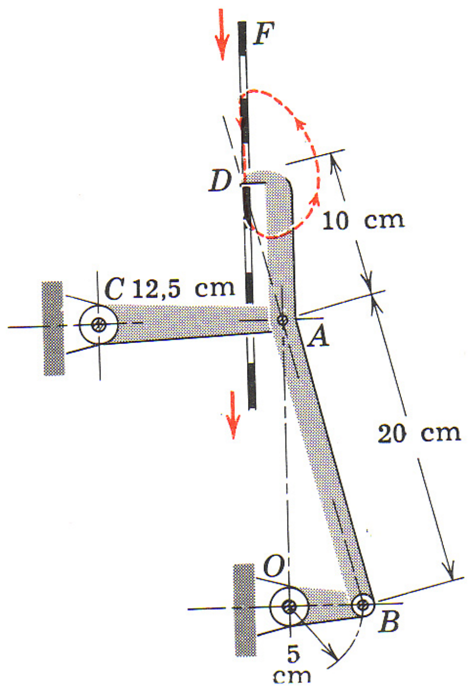
$$T = \left(\frac{116\sqrt{3}}{54} M\omega^2 L + \frac{3}{2} Mg\right)\frac{L}{2} = \frac{58}{54}\sqrt{3}\, M\omega^2 L + \frac{3}{\cancel{2}4} MgL$$

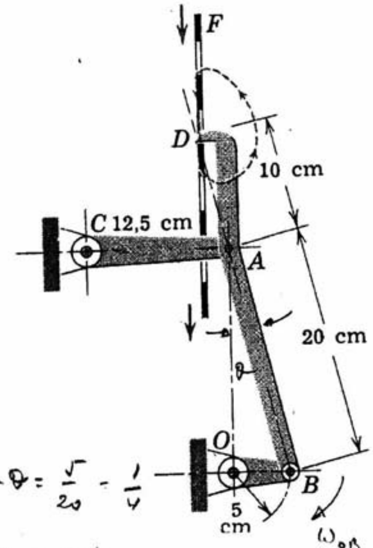
$$\boxed{T = \frac{29}{27}\sqrt{3}\, M\omega^2 L + \frac{3}{4} MgL}$$

Diciembre 2002

Un mecanismo de accionamiento para cinta perforada *F* consiste en la barra de conexión *DAB* impulsada por la manivela *OB*. La trayectoria de la uña *D* viene representada por la línea de trazos. Determinar la aceleración de D en el instante indicado para el cual *OB* y *CA* son ambas horizontales, siendo la velocidad angular constante de *OB* de 120 rpm en el sentido de las agujas del reloj.

Si las barras *OB* y *CA* carecen de masa y *DAB* tiene una masa de 2 Kg., obtener el par motor que será necesario introducir en *O* para obtener el movimiento en ese instante.





$\sin\theta = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

$OA = 19'36$ cm

$\omega_{OB} = \frac{2\pi n}{60} = 4\pi$ rad/s

$v_{B} = \omega_{OB} \cdot OB = 20\pi$ cm/s ↓

$v_A = v_B + v_{A/B}$

v_A: ? ; $v_{A/B}$: $\omega_{AB} \cdot AB$, $\perp AB$

Por consiguiente $v_{B/A} = 0$ y $\omega_{AB} = 0$ en el instante considerado.

$v_A = v_B = 20\pi$ cm/s

$\omega_{AC} = \frac{v_A}{AC} = \frac{20\pi}{12'5}$ rad/s

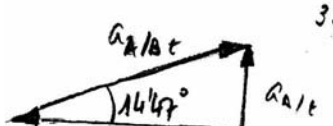
Aceleración del sólido ABD.

$a_A = a_B + a_{A/B}$

a_A: t ? ; n: $\omega_{AC}^2 \cdot AC = \frac{400\pi^2}{12'5^2} \cdot 12'5 = 32\pi^2$

a_B: n: $\omega_{OB}^2 \cdot OB = 16\pi^2 \cdot 5 = 80\pi^2$

$a_{A/B}$: t: $\perp AB$? ; n $= 0$ $(\omega_{AB} = 0)$



$a_{A/B_t} \cdot \cos 14'47 = 48\pi^2$

$a_{A/B} = \frac{48\pi^2}{\cos 14'47} = 49'56\pi^2$

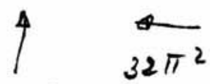
$\alpha_{AB} = 49'56\pi^2 / 20 = 2'478\pi^2$ rad/s²

$a_{A_t} = 49'56\pi^2 \cdot \sin 14'47 = 12'39\pi^2$

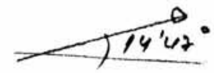
$\alpha_{AC} = \frac{a_{A_t}}{AC} = \frac{12'39\pi^2}{12'5} = 0'9912\pi^2$

$$a_D = a_A + a_{D/A}$$

a_A: t → $12'39\,\pi^2$; n → $32\pi^2$



$\alpha_{AB} \cdot AD = 24'78\,\pi$



$$(a_{D/A})_y = 6'195\,\pi^2 \uparrow$$

$$(a_{D/A})_x = 23'99\,\pi^2 \rightarrow$$

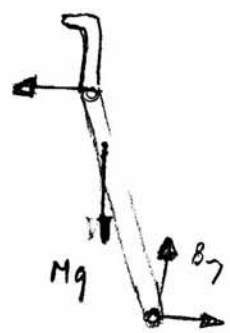
$$a_{Dx} = 8\pi^2 \ \text{cm/s}^2 \leftarrow$$

$$a_{Dy} = (12'39 + 6'195)\pi^2 = (18'585\,\pi^2) \uparrow \ \text{cm/s}^2$$

$$a_D = \left(\sqrt{8^2 + 18'585^2}\right)\pi^2 = 20'23\,\pi^2 \ \text{cm/s}^2 = 199'7\,\text{cm/s}$$

$$\boxed{a_D = 1'997 \ \text{m/s}^2}$$

Diagramas de Sólido Libre



La aceleración del centro de gravedad:

$$a_G = a_A + a_{G/A}$$

a_A: $12'39\,\pi^2 \uparrow$, $32\pi^2 \leftarrow$; $a_{G/A}$: $3'0975\,\pi^2 \downarrow$, $11'995\,\pi^2 \leftarrow$

$$a_{Gx} = 44\pi^2 \leftarrow$$

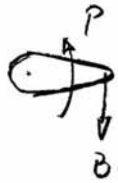
$$a_{Gy} = 12\pi^2 \uparrow$$

$$\Sigma F_y = M a_{Gy}$$

$$M_g + B_y = M a_{Gy}$$

$$B_y = M(a_{Gy} - g) = -8'62\,M$$

Barra OB



$$\Sigma \vec{M}_o = I_o \vec{\alpha} = 0$$

$$P = 8'62\,M \times 0'05 = 0'431\,M \ \text{N.m}$$

Para $M = 2$ kg

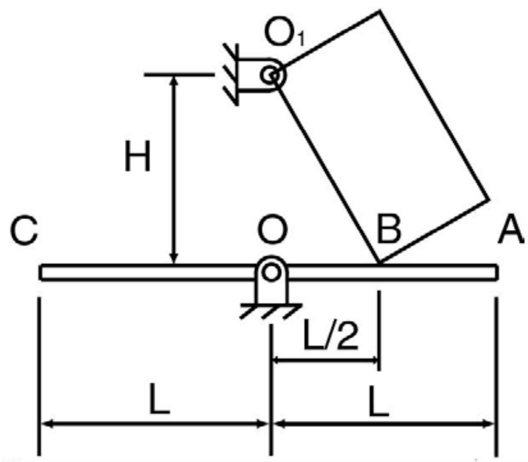
$$P = 0'862 \ \text{N.m}$$

Junio 2003

El sistema de la figura se encuentra en un plano vertical. La barra *AC* tiene longitud $2L$ y masa M y gira con velocidad angular ω y aceleración angular $\alpha = \sqrt{3}\omega^2$, ambas en sentido horario, merced a un mecanismo no indicado en la figura. La altura $H = L\sqrt{3}/2$. El rectángulo tiene largo L y ancho $L/\sqrt{3}$ y masa también M y se apoya sobre la barra en el punto *B*, a distancia $L/2$ de *O*.

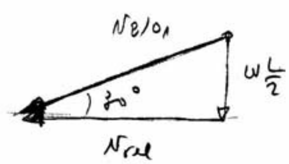
En el instante representado en la figura, hallar:

a) Velocidad y aceleración angulares de la placa.
b) El valor de la fuerza en el punto B, entre la placa y la barra.
c) El par motor P que hay que suministrar en *O* para que se produzca el movimiento en las condiciones indicadas.



$v_B = v_{O_1} + v_{B/O_1} = v_{arr} + v_{rel}$

$v_{B/O_1} \perp O_1B$; v_{rel} ?; $v_{arr} = v_O + v_{B/O}$; $\omega \frac{L}{2}$



$v_{B/O_1} \operatorname{sen} 30 = \omega \frac{L}{2} \rightarrow v_{B/O_1} = \omega L \rightarrow \omega_{O_1B} = \omega$ entrante

$v_{rel} = v_{B/O_1} \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \omega L$

$a_B = \vec{a}_{O_1} + \vec{a}_{B/O_1} = \vec{a}_{arr} + \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{cor}$

$\vec{a}_{O_1} = 0$; $\vec{a}_{B/O_1}$: t, n; $\perp O_1B$; $\vec{a}_{rel}$?; $\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{v}_{rel}$

$\vec{a}_{arr} = a_O + a_{B/O}$; $a_O = 0$; $a_{B/O}$: t, n

$\sqrt{3}\omega^2 L$

$(a_{B/O})_t = \frac{\sqrt{3}\omega^2 L}{2}$, $a_{cor} = \sqrt{3}\omega^2 L$

$a_{rel} = 0$

$(a_{B/O_1})_t = 0$

30°, 60°, $\omega^2 L$, $\omega^2 \frac{L}{2}$

$\omega^2_{O_1B} \cdot O_1B = \omega^2 L$

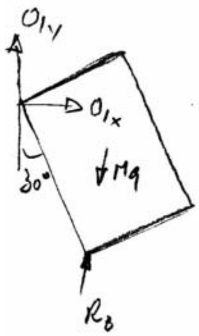
$\sqrt{3}\omega^2 L$, $\omega^2 \frac{L}{2}$

$(a_{B/O_1})_t \operatorname{sen} 30 = \omega^2 L \operatorname{sen} 60 \rightarrow (a_{B/O_1})_t = \sqrt{3}\omega^2 L$

$(a_{B/O_1})_t = 0 \rightarrow \alpha_{O_1B} = 0$

$a_{rel} = 0$

Para calcular la reacción en B, aislamos la placa



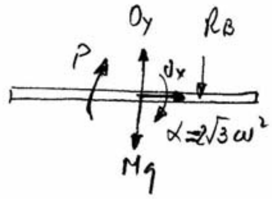
$$\Sigma \vec{N}_{O_1} = I_0 \vec{\alpha} \qquad I_0 = \frac{4}{9} ML^2 \text{, pero } \alpha = 0$$

$$Mg \frac{L}{2} - R_B \frac{L}{2} = 0$$

$$R_B = Mg$$

Finalmente, para calcular el par motor, se aisla la barra y se plantea la ecuación de momentos en el centro de gravedad.

$$\Sigma \vec{N}_G = I_G \cdot \alpha$$

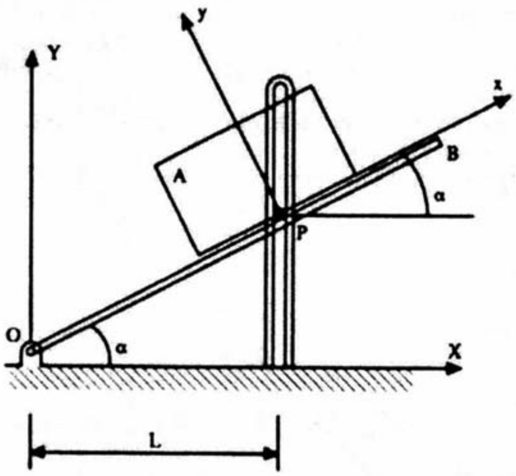


$$P + R_B \cdot \frac{L}{2} = \frac{1}{12} M (2L)^2 \cdot \sqrt{3}\,\omega^2$$

$$P + Mg\frac{L}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} M\omega^2 L^2$$

$$\boxed{P = \frac{\sqrt{3}}{3} ML^2\omega^2 - \frac{MgL}{2}}$$

Septiembre 2003



En el sistema de la figura la placa *A* tiene masa *M* y dimensiones despreciables y puede deslizar sobre la barra giratoria *OB*. En el punto medio *P* del lado de contacto hay un pivote que desliza dentro de una ranura vertical. La barra *OB* tiene también masa *M* y longitud *2L* y gira con velocidad angular ω constante en sentido antihorario, accionada por un motor en la articulación *O*. El conjunto está situado en un plano vertical.

Se pide obtener, cuando *OB* forma un ángulo α=30º con la horizontal:

a) Velocidad y aceleración del punto *P* de la placa.

b) Valor de la normal entre la placa y la barra *OB*, y entre la placa y la ranura vertical.

c) Par motor suministrado en ese instante para lograr el movimiento en las condiciones indicadas.

Se sabe que el punto P desliza por la ranura y sobre OB. Entonces, el movimiento de P será vertical y lo podemos descomponer en arrastre y relativo con la barra OB.

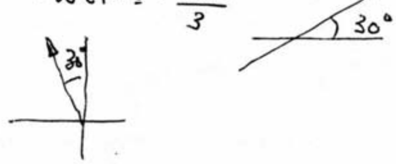
Se calcula fácilmente que $OP = \frac{2\sqrt{3}}{3}L$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{arr} + \vec{v}_{rel} \text{ con } OB$$

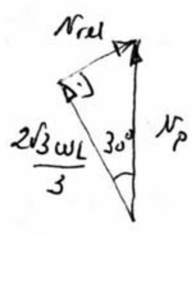
$\vec{v}_P$: ? , |

$\vec{v}_{arr}$: $v_O = 0$; $v_{P/O}$: $\perp OP$, $\omega\, OP = \frac{2\sqrt{3}\,\omega L}{3}$

$\vec{v}_{rel}$: $\parallel OP$, ?



El polígono de velocidades resulta:



$$\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}\omega L}{v_P} \longrightarrow v_P = \frac{4}{3}\omega L \uparrow$$

$$\boxed{v_{rel} = v_P \operatorname{sen} 30 = \frac{2}{3}\omega L}$$

Para calcular las aceleraciones seguimos el mismo procedimiento. La aceleración de P será vertical.

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{arr} + \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{cor} \quad \text{con OB}$$

$\vec{a}_P$: ?

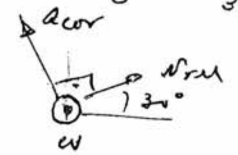
$\vec{a}_{arr}$:
- t: $= 0$ $(\alpha_{OB} = 0)$
- n: $\omega_{OB}^2 \cdot OB = \frac{2\sqrt{3}}{3}\omega^2 L$

$\vec{a}_{rel}$: $/\!/$ OB

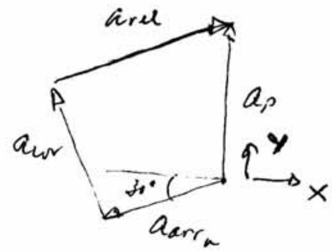
$\vec{a}_{cor}$: $2\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{v}_{rel}$

$$2\omega \cdot \frac{2}{3}\omega L = \frac{4}{3}\omega^2 L$$

30°



30°



Proy en x

$$a_{rel}\cos 30 - a_{arr_n}\cos 30 - a_{cor}\,\text{sen}\,30 = 0$$

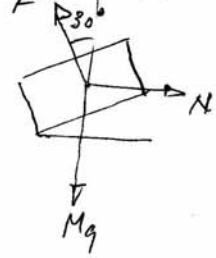
y operando $a_{rel} = \frac{10\sqrt{3}}{9}\omega^2 L$

Proy en y.

$$a_P = a_{cor}\cos 30 + a_{rel}\,\text{sen}\,30 - a_{arr_n}\,\text{sen}\,30$$

$$a_P = \frac{2\sqrt{3}}{3}\omega^2 L + \frac{5\sqrt{3}}{9}\omega^2 L - \frac{\sqrt{3}}{3}\omega^2 L = \frac{8\sqrt{3}}{9}\omega^2 L$$

Al ser la placa de dimensiones despreciables, se puede considerar que todos los puntos de la placa tienen igual aceleración que el punto P. Haremos el diagrama de sólido libre y determinamos, mediante las ecuaciones de Newton-Euler las normales. Llamamos F a la fuerza que ejerce la barra OB y N a la reacción de la ranura vertical.



$$\Sigma F_x = M a_{G_x}$$

$$N - F\,\text{sen}\,30 = 0 \rightarrow N = \frac{F}{2} \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = M a_{G_y}$$

$$F\cos 30 - Mg = M\frac{8\sqrt{3}}{9}\omega^2 L$$

$$F = \frac{2\sqrt{3}}{3}Mg + \frac{16}{9}M\omega^2 L$$

y entonces, de (1)

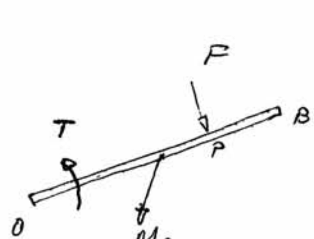
$$N = \frac{\sqrt{3}}{3}Mg + \frac{8}{9}M\omega^2 L$$

Para obtener el par motor, aislamos la barra OB.

$$\Sigma \vec{N}_O = J\vec{\alpha} = 0 \quad [\text{Al ser } \alpha = 0,\ \omega = \text{cte}]$$

$$T = MgL\cos 30° + F \cdot OP$$

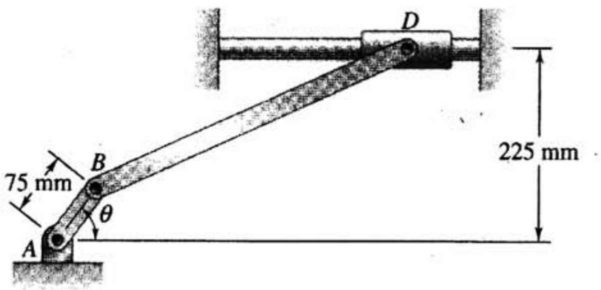
$$T = \frac{\sqrt{3}}{2}MgL + \frac{4}{3}MgL + \frac{32\sqrt{3}}{27}M\omega^2 L^2$$



Aquí F se introduce con sentido contrario al supuesto al aislar OB.

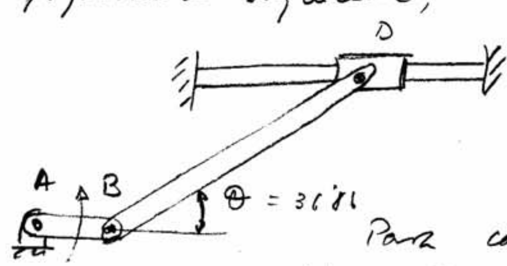
Diciembre 2003

La barra uniforme *BD* de *375 mm* pesa *3,56 daN* y está conectada, como se muestra en la figura, a la manivela *AB*, de *0,7 daN* de peso y *75 mm* de longitud, y a una corredera *D* de masa despreciable, que puede deslizar libremente por una guía horizontal. Sabiendo que la manivela *AB* rota en sentido antihorario a la velocidad constante de *300 rpm*, hallar las reacciones en *B* y *D* y el par motor que habrá que imprimir a la manivela cuando $\theta = 0$.



$$w = \frac{2\pi \cdot 300}{60} = 10\,\pi \text{ rad/s}$$

Cuando $\theta = 0$, el mecanismo estará en la configuración siguiente, con las relaciones angulares indicadas:

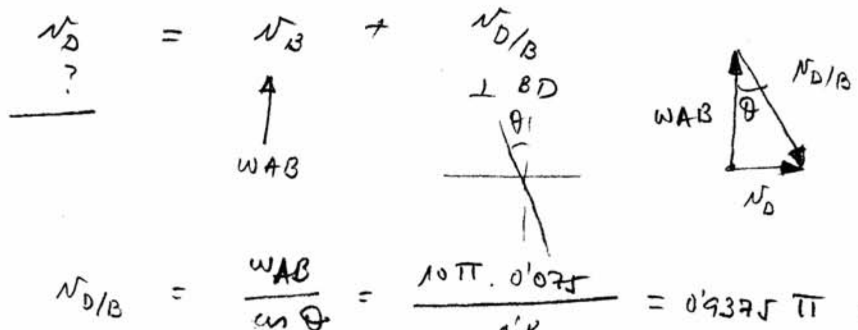


$$\text{sen}\,\theta = \frac{225}{375} = 0'6 \rightarrow \theta = 36'86$$

$$\cos\theta = 0'8 \qquad \text{tag}\,\theta = 0'75$$

Para calcular las fuerzas que nos piden, tenemos que calcular las aceleraciones del centro de masas de la barra BD.

<u>Cinemática</u>



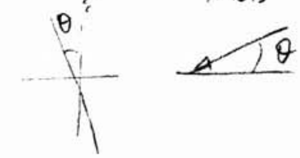
$$v_{D/B} = \frac{\omega AB}{\cos\theta} = \frac{10\pi \cdot 0'075}{0'8} = 0'9375\,\pi \text{ m/s}$$
$$= 2'35 \text{ m/s}$$

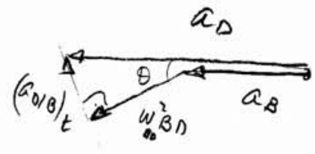
$$v_D = v_{D/B}\,\text{sen}\,\theta = 0'5625\pi \text{ m/s} = 1'767 \text{ m/s}$$

$$\omega_{BD} = \frac{v_{D/B}}{BD} = \frac{0'9375\,\pi}{0'375} = 2'5\,\pi \text{ rad/s} \quad \text{entrante}$$
$$= 7'85 \text{ rad/s}$$

$a_D = a_B + a_{D/B}$

$?$ — $\omega^2 AB$ — t: $?$ — n: $\parallel BD$, $\omega_{BD}^2 BD$





$\omega_{BD}^2 BD \cdot \operatorname{sen}\theta = (a_{B/D})_t \cos\theta$

$(a_{D/B})_t = \dfrac{\omega_{BD}^2 \, BD \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = 6'25\,\pi^2 \cdot 0'375 \cdot 0'75$

$(a_{D/B})_t = 1'757\,\pi^2 \quad m/s^2$

$\alpha_{BD} = \dfrac{(a_{D/B})_t}{BD} = 4'6875\pi^2$ caliente

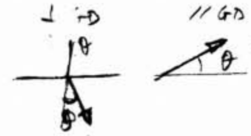
$a_D = a_B + \omega_{BD}^2 BD \cos\theta + (a_{D/B})_t \operatorname{sen}\theta$

$a_D = 100\,\pi^2\, 0'075 + 6'25\pi^2 0'375 \cdot 0'8 + 1'75\,\pi^2 0'6 = 10'425\,\pi^2 \quad m/s^2$

Calculamos la aceleración del centro de gravedad.

$\vec{a}_G = \vec{a}_D + \vec{a}_{G/D} =$

$8'9625\,\pi^2$ — $10'425\,\pi^2$ — t: $\perp GD$, $4'6875\pi^2 \dfrac{0'375}{2}$ — n: $\parallel GD$, $\omega_{BD}^2 GD$, $2'5^2\pi^2 \dfrac{0'375}{2}$

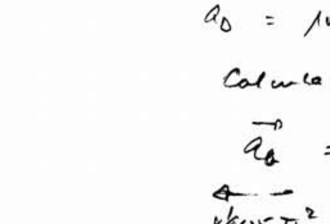


$a_{Gy} = -4'6875\,\pi^2 \dfrac{0'375}{2} \cos\theta + 2'5^2\pi^2 \dfrac{0'375}{2} \operatorname{sen}\theta = 0$

$a_{Gx} = -10'425\,\pi^2 + 4'6875\pi^2 \dfrac{0'375}{2} \operatorname{sen}\theta + 6'25\pi^2 \dfrac{0'375}{2} \cos\theta = -8'9625\pi^2$

Ahora ya se puede pasar a la dinámica.

Primero dibujamos el diagrama de sólido libre de la barra BD y le aplicamos las ecuaciones de Newton-Euler.



$\Sigma F_x = M a_{Gx} \cdot \; -B_x = \dfrac{35'6}{9'81}\left(-8'9625\,\pi^2\right) = -32'52\pi^2 N$

$\Sigma F_y = 0 \quad D + B_y - Mg = 0 \rightarrow D = Mg - B_y$

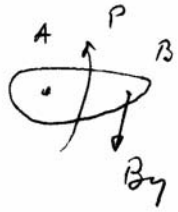
$\Sigma \vec{N}_G = I_G\,\alpha \quad -B_y\,l + D \cdot l = \frac{1}{12} M L^2\, 4'6875\,\pi^2$

$-B_y + Mg - B_y = 0'5315\,\pi^2$

$\boxed{B_y = 15'17\ N}$

$\boxed{D = 35'6 - 15'17 = 20'43\ N}$

Finalmente, para obtener el par motor basta con aislar la barra AB. Al carecer de masa, se puede suponer que no tiene inercia y entonces



$\Sigma N_A = 0 \qquad By \cdot AB - P = 0$

$P = By \cdot AB = 15'17 \cdot 0'075 = 1'13\ Nm$