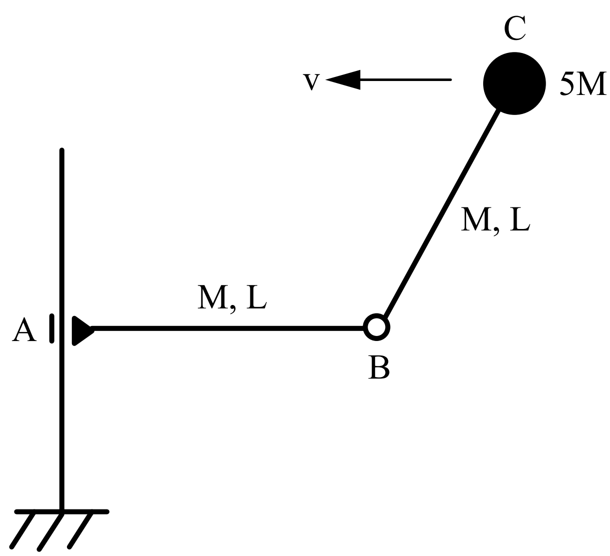
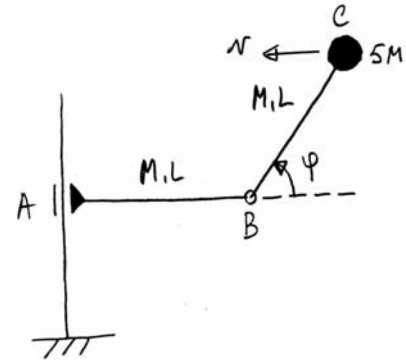
Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Junio 94
Nombre ....

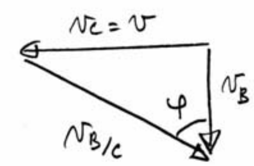
El robot plano de la figura transporta en su extremo una masa puntual de magnitud 5M a velocidad constante horizontal de valor v. Cada brazo del robot tiene masa M uniformemente repartida y longitud L.
Si suponemos que asociado al par prismático (deslizadera) se encuentra un motor lineal y asociado al par de revolución hay un motor rotativo:
a) Calcular los esfuerzos motores requeridos para conseguir el movimiento deseado (serán función de la posición).
b) Particularizar los resultados obtenidos para el instante en que el segundo brazo forma un ángulo de 45^{o} con la horizontal.





Tal y como se indica en el enunciado, los esfuerzos motores serán función de la posición. Sin embargo, aunque el sistema tiene dos grados de libertad, solamente influirá el valor del ángulo φ, ya que la posición de la barra AB respecto al suelo es irrelevante para la configuración del sistema. Por tanto, el cálculo de esfuerzos motores se realizará en función del ángulo φ, que determina la inclinación de la barra BC.

$$\underset{|\ ?}{v_B} = \underset{\leftarrow v}{v_C} + \underset{\varphi,\ ?}{v_{B/C}}$$

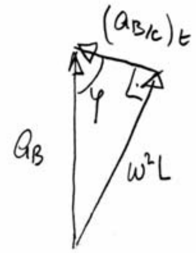


$$\boxed{v_B = \frac{v}{\mathrm{tg}\,\varphi} \downarrow}$$

$$v_{B/C} = \frac{v}{\mathrm{sen}\,\varphi} = \omega L \implies \boxed{\omega = \frac{v}{L\,\mathrm{sen}\,\varphi} \text{ saliente}}$$

$$a_B = a_C + a_{B/C}$$

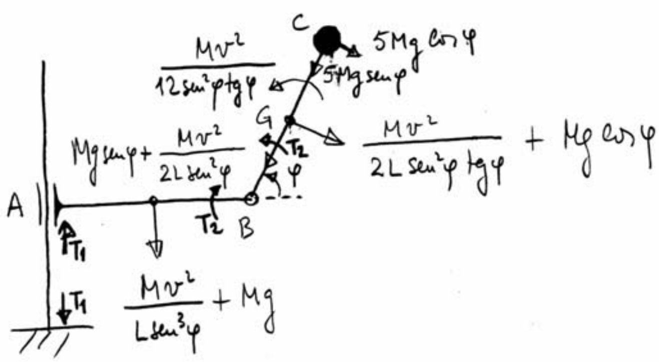
$$\begin{array}{cccc} |? & \overset{\shortparallel}{0} & \omega^2 L \ (\varphi) & ? \ (\varphi) \end{array}$$



$$(a_{B/C})_t = \frac{\omega^2 L}{tg\varphi} = \frac{v^2 L}{L^2 sen^2\varphi \, tg\varphi} = \frac{v^2}{L \, sen^2\varphi \, tg\varphi}$$

$$\alpha = \frac{a_{B/C}}{L} = \frac{v^2}{L^2 sen^2\varphi \, tg\varphi} \quad ; \quad \boxed{\alpha = \frac{v^2}{L^2 sen^2\varphi \, tg\varphi} \ \text{entrante}}$$

$$a_B = \frac{\omega^2 L}{sen\varphi} = \frac{v^2 L}{L^2 sen^2\varphi \, sen\varphi} \quad ; \quad \boxed{a_B = \frac{v^2}{L \, sen^3\varphi} \uparrow}$$

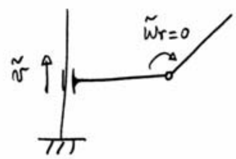


$$\boxed{a_G = a_C + a_{G/C} = \frac{v^2}{2L\,sen^2\varphi} \ (\varphi) + \frac{v^2}{2L\,sen^2\varphi\,tg\varphi} \ (\varphi)}$$

$$\begin{array}{ccc} \overset{\shortparallel}{0} & \omega^2 \frac{L}{2} \ (\varphi) & \alpha \frac{L}{2} \ (\varphi) \end{array}$$

$$I_G\alpha = \frac{1}{12}M\cancel{L^2}\,\frac{v^2}{\cancel{L^2}\,\text{sen}^2\varphi\,\text{tg}\,\varphi} = \frac{Mv^2}{12\,\text{sen}^2\varphi\,\text{tg}\,\varphi}$$

<u>Cálculo de T_1</u>



$$T_1\tilde{v} - \left(\frac{Mv^2}{L\,\text{sen}^3\varphi} + Mg\right)\tilde{v} - \frac{Mv^2}{2L\,\text{sen}^2\varphi}\,\tilde{v}\,\text{sen}\,\varphi -$$

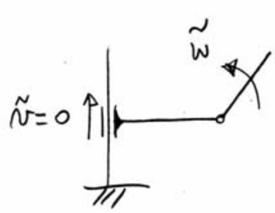
$$- \frac{Mv^2}{2L\,\text{sen}^2\varphi\,\text{tg}\,\varphi}\,\tilde{v}\cos\varphi - Mg\,\tilde{v} - 5Mg\,\tilde{v} = 0$$

$$T_1 = 7Mg + \frac{Mv^2}{L\,\text{sen}^3\varphi} + \frac{Mv^2}{2L\,\text{sen}\,\varphi} + \frac{Mv^2}{2L\,\text{sen}\,\varphi\,\text{tg}^2\varphi}$$

$$\frac{\cos\varphi}{\text{sen}^2\varphi\,\text{tg}\,\varphi} = \frac{\cos^2\varphi}{\text{sen}^2\varphi\,\text{sen}\,\varphi} = \frac{1}{\text{sen}\,\varphi\,\text{tg}^2\varphi}$$

$$\boxed{T_1 = 7Mg + \frac{Mv^2}{L}\left(\frac{1}{\text{sen}^3\varphi} + \frac{1}{2\,\text{sen}\,\varphi} + \frac{1}{2\,\text{sen}\,\varphi\,\text{tg}^2\varphi}\right)}$$

<u>Cálculo de T_2</u>



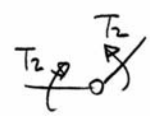
$$T_2 \tilde{\omega} + \frac{Mv^2}{12 \operatorname{sen}^2\varphi \, \operatorname{tg}\varphi}\tilde{\omega} - \left(\frac{Mv^2}{2L \operatorname{sen}^2\varphi \, \operatorname{tg}\varphi} + Mg\cos\varphi\right)\tilde{\omega}\frac{L}{2} -$$

$$-(5Mg\cos\varphi)\,\tilde{\omega} L = 0$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{3-1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$T_2 = \frac{Mv^2}{4 \operatorname{sen}^2\varphi \, \operatorname{tg}\varphi} - \frac{Mv^2}{12 \operatorname{sen}^2\varphi \, \operatorname{tg}\varphi} + 5MgL\cos\varphi + \frac{1}{2}MgL\cos\varphi$$

$$\boxed{T_2 = \frac{11}{2} MgL\cos\varphi + \frac{1}{6}\frac{Mv^2}{\operatorname{sen}^2\varphi \, \operatorname{tg}\varphi}}$$



b) Para $\varphi = 45^\circ$:

$$T_1 = 7Mg + \frac{Mv^2}{L}\left(\frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

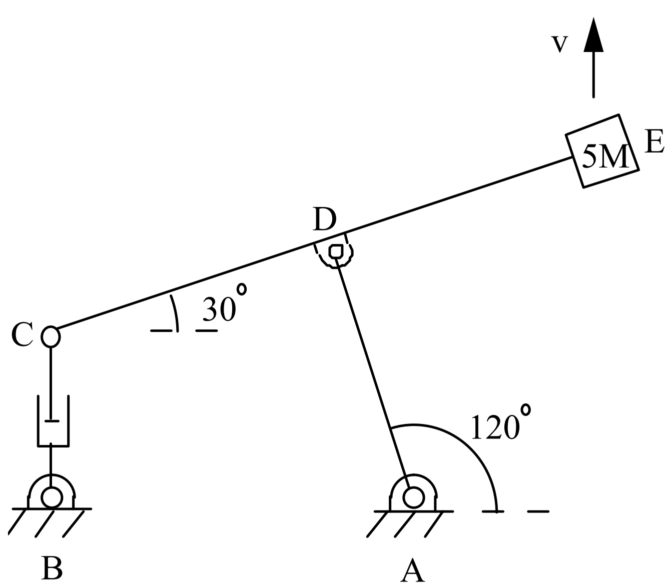
$$\boxed{T_1 = 7Mg + 3\sqrt{2}\,\frac{Mv^2}{L}}$$

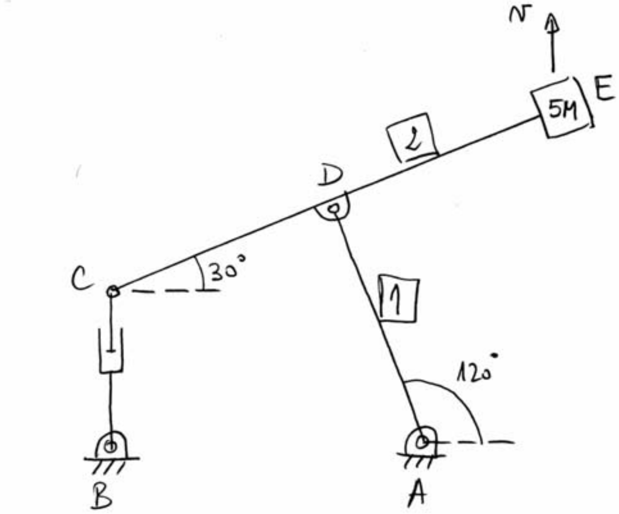
$$T_2 = \frac{11}{2} MgL\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{6}\frac{Mv^2}{\frac{1}{2}\times 1}$$

$$\boxed{T_2 = \frac{11\sqrt{2}}{4} MgL + \frac{1}{3}Mv^2}$$

Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Septiembre 94
Nombre ....

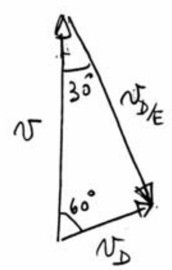
El robot plano de la figura está diseñado para transportar en la mano una masa puntual de magnitud 5M. La barra AD tiene masa M y longitud L, y la barra CE tiene masa M y longitud 2L, estando el punto D situado en la mitad de la barra. El robot se mueve merced a la acción de dos motores: uno rotativo situado en el punto A y otro lineal unido a los puntos B y C (despréciese la masa de ambos motores). Si el movimiento del robot es tal que el punto E tiene velocidad vertical v constante en todo momento, determinar, para la posición indicada en la figura, el valor de los esfuerzos motores necesarios.
El sistema está previsto para su operación en reparaciones de satélites espaciales, por lo que no debe considerarse el efecto gravitatorio.





Como siempre, lo primero será resolver la cinemática. Primero velocidades y después aceleraciones.

$$\underset{?}{\underset{30^\circ}{v_D}} = \underset{\uparrow v}{v_E} + \underset{?}{\underset{60^\circ}{v_{D/E}}}$$



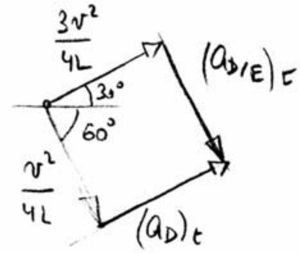
$$v_D = v\,\text{sen}30 = \frac{v}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \frac{v_D}{\overline{AD}} = \boxed{\frac{v}{2L} \ \text{entr.} = \omega_1}$$

$$v_{D/E} = v\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} v$$

$$\omega_2 = \frac{v_{D/E}}{\overline{DE}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}\,v}{2L} \ \text{sal.} = \omega_2}$$

$$a_D = \cancel{a_E} + a_{D/E}$$

a_E (n)	a_E (t)	$a_{D/E}$ (n)	$a_{D/E}$ (t)
$60°$	$30°$	$30°$	$60°$
$\omega_1^2 L = \dfrac{v^2}{4L}$	?	$\omega_2^2 L = \dfrac{3v^2}{4L}$	?

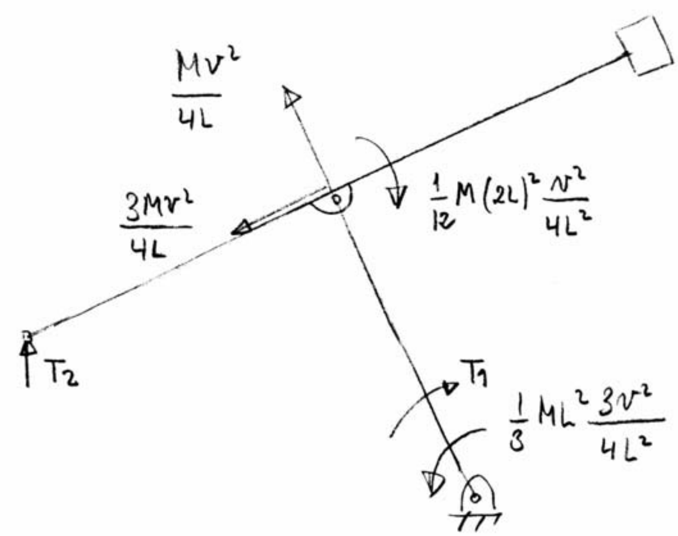


$$(a_D)_t = \frac{3v^2}{4L} = \alpha_1 L$$

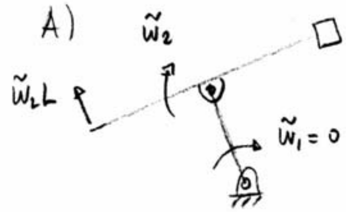
$$\boxed{\alpha_1 = \frac{3v^2}{4L^2} \text{ entrante}}$$

$$(a_{D/E})_t = \frac{v^2}{4L} = \alpha_2 L$$

$$\boxed{\alpha_2 = \frac{v^2}{4L^2} \text{ saliente}}$$



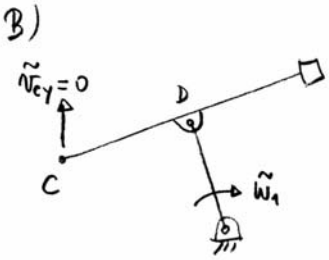
A)



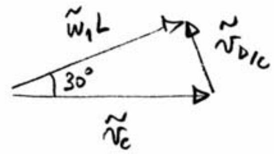
$$T_2\, \tilde{\omega}_2 L \cos 30 + \frac{1}{12} M (2L)^2 \frac{v^2}{4L^2} \tilde{\omega}_2 = 0$$

$$T_2 \frac{\sqrt{3}}{2} L = -\frac{1}{12} M v^2 \rightarrow \boxed{T_2 = -\frac{M v^2}{6\sqrt{3}\, L}}$$

B)



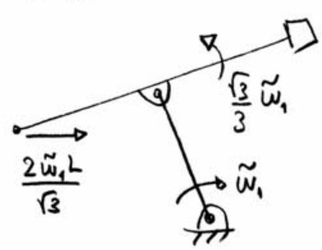
$$\tilde{v}_D = \tilde{v}_c + \tilde{v}_{D/C}$$



$$\tilde{v}_{D/C} = \tilde{\omega}_1 L \operatorname{tg} 30$$

$$\tilde{v}_{D/C} = \frac{\sqrt{3}}{3} \tilde{\omega}_1 L = \tilde{\omega}_2 L \rightarrow \tilde{\omega}_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \tilde{\omega}_1 \text{ saliente}$$

$$\tilde{v}_c = \frac{\tilde{\omega}_1 L}{\cos 30} = \frac{2\tilde{\omega}_1 L}{\sqrt{3}} \longrightarrow$$



$$T_1 \tilde{\omega}_1 - \frac{1}{3} M L^2 \frac{3v^2}{4L^2} \tilde{\omega}_1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \tilde{\omega}_1 \frac{1}{12} M (2L)^2 \frac{v^2}{4L^2} -$$

$$- \tilde{\omega}_1 L \frac{3Mv^2}{4L} = 0$$

$$T_1 = \frac{1}{4} M v^2 + \frac{\sqrt{3}}{36} M v^2 + \frac{3}{4} M v^2$$

$$\boxed{T_1 = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{36}\right) M v^2}$$

Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Septiembre 95

Nombre ....

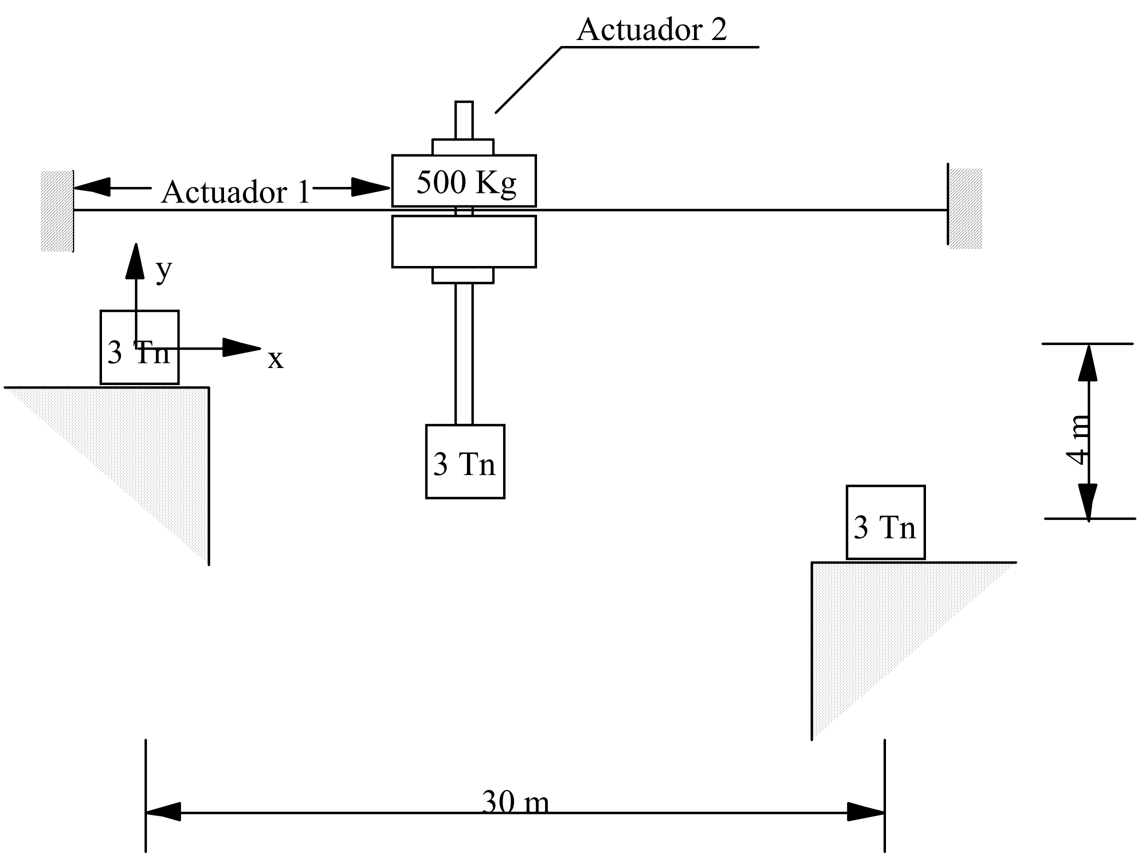
La figura representa un puente-grúa de los comúnmente utilizados en las naves industriales. La labor que debe realizar consiste en transportar bloques de 3 toneladas desde la posición izquierda a la derecha, salvando una distancia de 30 metros y una altura de 4 metros en un tiempo de maniobra de 20 segundos. Los bloques se sujetan al elemento vertical del puente-grúa por simple imantación. El cuerpo central del puente-grúa tiene una masa de 500 Kg, mientras que la masa del elemento vertical al que se sujetan los bloques puede despreciarse.

Se desea que el movimiento sea suave, por lo que se recurre a leyes cicloidales para los desplazamientos horizontal y vertical.

a) Determinar dichas leyes en función del tiempo, x(t) e y(t).

b) Si se dispone de dos actuadores lineales, obtener los esfuerzos que han de realizar en función del tiempo.

Nota: valor de la gravedad, g=9.81



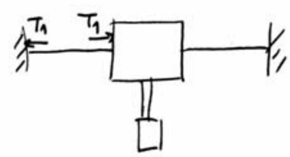
a) $x(t) = \frac{30}{20} t - \frac{30}{2\pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{20}$

$$\begin{cases} x(t) = 1'5\, t - \frac{15}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi t}{10} \\ \dot{x}(t) = 1'5 \left(1 - \cos \frac{\pi t}{10}\right) \\ \ddot{x}(t) = 0'15\pi \operatorname{sen} \frac{\pi t}{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(t) = -\frac{4}{20} t + \frac{4}{2\pi} \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{20} = -0'2\, t + \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi t}{10} \\ \dot{y}(t) = -0'2 \left(1 - \cos \frac{\pi t}{10}\right) \\ \ddot{y}(t) = -0'02\pi \operatorname{sen} \frac{\pi t}{10} \end{cases}$$

b) $T_1 = \left(M_{bloque} + M_{guia}\right) \ddot{x} = (3000 + 500)\, 0'15\pi \operatorname{sen} \frac{\pi t}{10}$

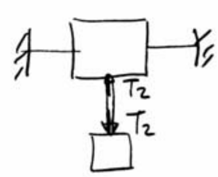
$$\boxed{T_1 = 525\pi \operatorname{sen} \frac{\pi t}{10} \ \text{N}}$$



$-(T_2 + Mg) = M\ddot{y}$

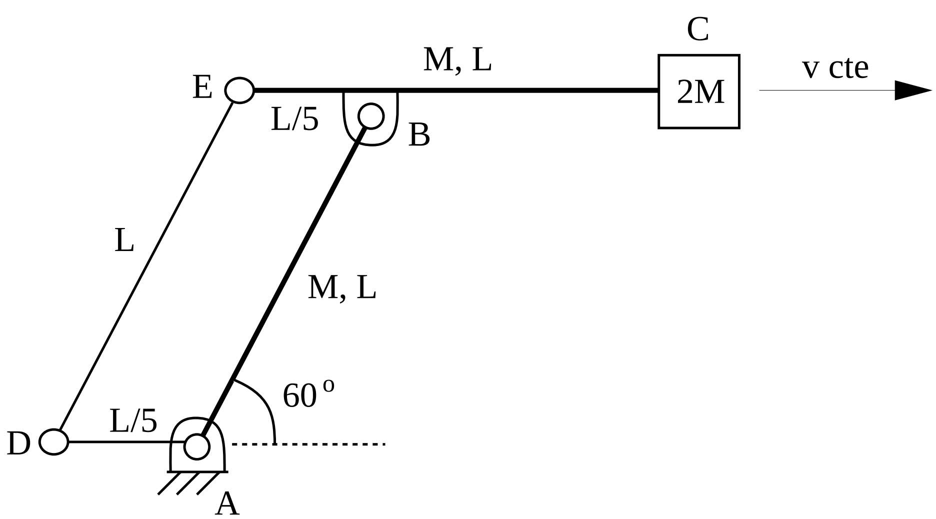
$T_2 = -Mg - M\ddot{y} = -3000g + 3000 \times 0'02\pi \operatorname{sen} \frac{\pi t}{10}$

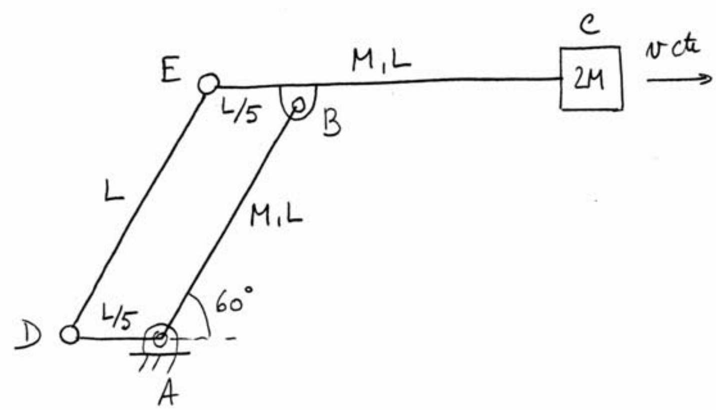
$$\boxed{T_2 = \left(60\pi \operatorname{sen} \frac{\pi t}{10} - 29430\right) \ \text{N}}$$



Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Junio 96
Nombre...

El diseño que se muestra en la figura se emplea para evitar que el motor que hace variar el ángulo entre los dos brazos deba montarse en la articulación que los une, ya que ello implica tener que cargar con ese motor. Con este diseño, sin embargo, ambos motores pueden ir montados en la base del robot, uno conectado entre el elemento fijo y el brazo AB, y el otro conectado entre el elemento fijo y la barra AD, de masa despreciable. La barra DE también tiene masa despreciable. Las barras AB y EC tienen masa uniformemente distribuida. En la mano del robot (punto C) es transportada un masa puntual de valor 2M.
En la posición de la figura, calcular los dos esfuerzos motores así como el esfuerzo a que se halla sometida la barra DE, si se sabe que la mano del robot sigue una trayectoria rectilínea horizontal con velocidad v constante.

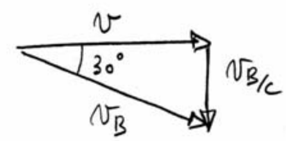




Comenzamos con el cálculo de velocidades y aceleraciones.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{v}_{B/C}$$

30° ? $\quad$ v $\quad$ | ?



$$v_{B/C} = \frac{\sqrt{3}}{3} v = \omega_{BC} \frac{4}{5} L$$

$$\vec{\omega}_{BC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} v}{\frac{4}{5} L} = \boxed{\frac{5\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{v}{L} = \vec{\omega}_{BC}}$$

saliente

$$v_B = \frac{v}{\sqrt{3}/2} = \frac{2v}{\sqrt{3}} = \omega_{AB} L$$

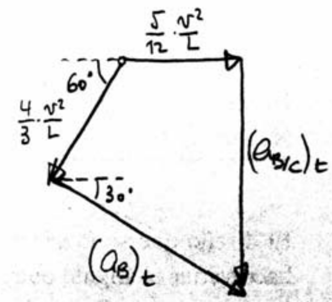
$$\boxed{\vec{\omega}_{AB} = \frac{2v}{\sqrt{3} L}}$$ entrante

$$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{B/C}$$

$\vec{a}_B$: $\omega_{AB}^2 L = \frac{4}{3}\frac{v^2}{L}$ (60°), ? (30°)

$\vec{a}_C = \vec{0}$

$\vec{a}_{B/C}$: $\longrightarrow \ \omega_{BC}^2 \frac{4}{5}L = \frac{75}{144}\cdot\frac{4}{5}\frac{v^2}{L} = \frac{5}{12}\frac{v^2}{L}$; $|$?



$$(a_B)_t \cos 30 = \left(\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{5}{12}\right)\frac{v^2}{L}$$

$$(a_B)_t = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{(8+5)}{12}\frac{v^2}{L} = \frac{13}{6\sqrt{3}}\cdot\frac{v^2}{L} = (a_B)_t$$

$$\vec{\alpha}_{AB} = \frac{(a_B)_t}{L} = \boxed{\frac{13}{6\sqrt{3}}\cdot\frac{v^2}{L^2} = \vec{\alpha}_{AB} \ \text{entrante}}$$

$$(a_{B/C})_t = \left(\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{13}{6\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}\right)\frac{v^2}{L} = \left(\frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{13}{36}\sqrt{3}\right)\frac{v^2}{L} = \frac{37}{36}\sqrt{3}\,\frac{v^2}{L} = (a_{B/C})_t$$

$$\vec{\alpha}_{BC} = \frac{(a_{B/C})_t}{\frac{4}{5}L} = \frac{37\sqrt{3}}{36}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{v^2}{L^2} = \boxed{\frac{185\sqrt{3}}{144}\,\frac{v^2}{L^2} = \vec{\alpha}_{BC} \ \text{saliente}}$$

Cálculo de la aceleración del centro de gravedad del brazo EC.

$$\vec{a}_{G2} = \vec{a}_C + \vec{a}_{G2/C}$$

$\vec{a}_{G2}$: ?

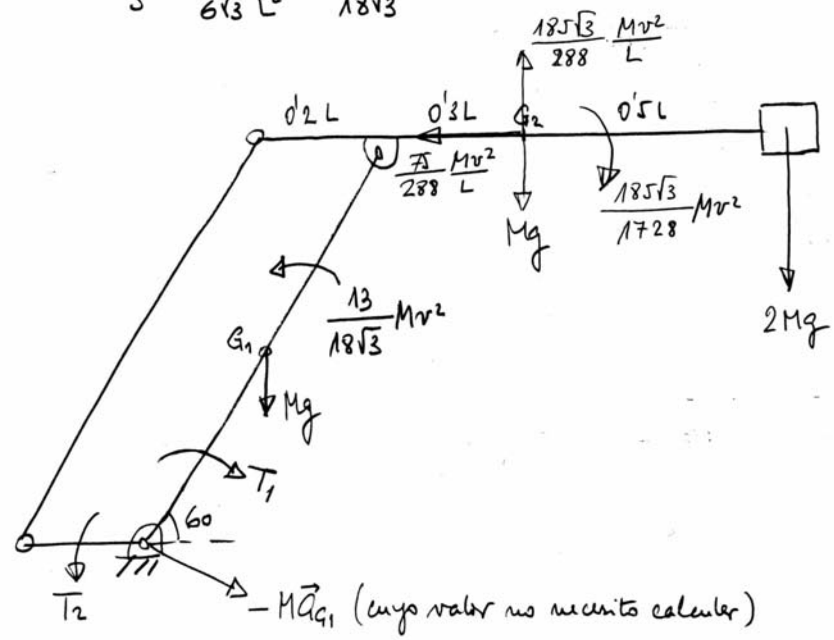
$\vec{a}_C = \vec{0}$

$\vec{a}_{G2/C}$: $\longrightarrow \ \omega_{BC}^2\frac{L}{2} = \frac{75}{288}\cdot\frac{v^2}{L}$; $\downarrow \ \alpha_{BC}\frac{L}{2} = \frac{185\sqrt{3}}{288}\cdot\frac{v^2}{L}$

$$\boxed{\vec{a}_{G2} = \ \longrightarrow \frac{75}{288}\cdot\frac{v^2}{L} \ ; \ \downarrow \frac{185\sqrt{3}}{288}\frac{v^2}{L}}$$

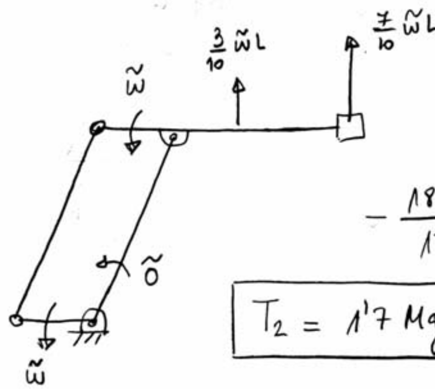
Diagrama de fuerzas aplicadas y de inercia.

$$I_{O_1}\alpha_{AB} = \frac{1}{3}ML^2\frac{13}{6\sqrt{3}}\frac{v^2}{L^2} = \frac{13}{18\sqrt{3}}Mv^2$$



$$I_{G_2}\alpha_{BC} = \frac{1}{12}ML^2\frac{185\sqrt{3}}{144}\frac{v^2}{L^2} = \frac{185\sqrt{3}}{1728}Mv^2$$

Cálculo del esfuerzo motor T_2.

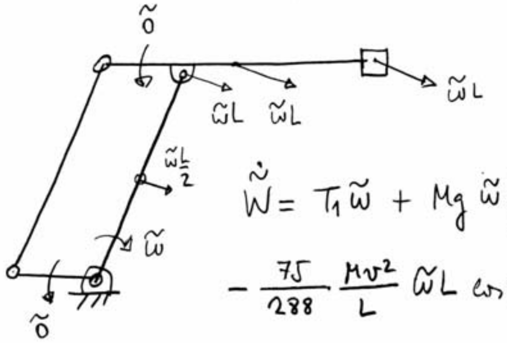


$$\mathring{\tilde{W}} = T_2\tilde{\omega} + \left(\frac{185\sqrt{3}}{288}\frac{Mv^2}{L} - Mg\right)\frac{3}{10}\tilde{\omega}L -$$

$$-\frac{185\sqrt{3}}{1728}Mv^2\tilde{\omega} - 2Mg\frac{7}{10}\tilde{\omega}L = 0$$

$$\boxed{T_2 = 1'7\,MgL - 0'1483\,Mv^2}$$

Cálculo del esfuerzo motor T_1.



$$\dot{\tilde{W}} = T_1\tilde{\omega} + Mg\,\tilde{\omega}\frac{L}{2}\cos 60 - \frac{13}{18\sqrt{3}}Mv^2\,\tilde{\omega} -$$

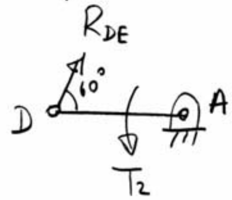
$$- \frac{75}{288}\cdot\frac{Mv^2}{L}\,\tilde{\omega}L\cos 30 - \left(\frac{185\sqrt{3}}{288}\cdot\frac{Mv^2}{L} - Mg\right)\tilde{\omega}L\cos 60 -$$

$$- 2Mg\,\tilde{\omega}L\cos 60 = 0$$

$$\boxed{T_1 = 1'1988\,Mv^2 - 1'75\,MgL}$$

Cálculo de la reacción en la barra DE.

Es suficiente con aislar la barra DA.



Tomando momentos en A,

$$T_2 = R_{DE}\,\frac{L}{5}\,\mathrm{sen}\,60$$

luego,

$$R_{DE} = \frac{5\,T_2}{L\,\mathrm{sen}\,60} = \frac{10\times\left(1'7\,MgL - 0'1483\,Mv^2\right)}{\sqrt{3}\,L}$$

$$\boxed{R_{DE} = \frac{17}{\sqrt{3}}\,Mg - 0'8562\,\frac{Mv^2}{L}}$$

Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Septiembre 96

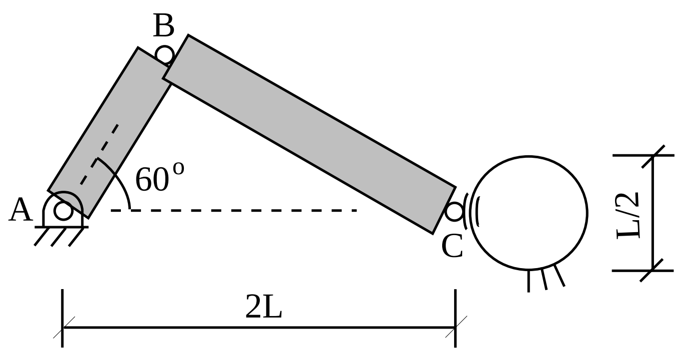
Nombre ....

En el mecanismo de la figura, el punto C se mueve con velocidad constante sobre la guía circular fija de diámetro L/2, a razón de tres vueltas por segundo en sentido contrario a las agujas del reloj. Los dos sólidos que componen el mecanismo pueden asimilarse a rectángulos. El primero, AB, tiene longitud L y anchura L/4, con una masa de valor M. El segundo, BC, es de longitud $L\sqrt{3}$, anchura también L/4, y masa $M\sqrt{3}$. El conjunto posee un grado de libertad y se mueve merced a la acción de un motor rotativo situado en A. Calcular, para la posición de la figura:

a) Valor del par motor.

b) Valor de la reacción en C.

Nota: el sistema se halla sometido a la acción de la gravedad.

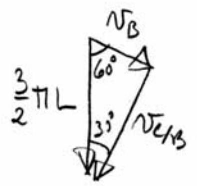


La velocidad de C vale,

$$v_C = 3 \times 2\pi \times \frac{L}{4} = \frac{3}{2}\pi L \downarrow$$

Sabemos que,

$$\underset{\frac{3}{2}\pi L \downarrow}{v_C} = \underset{30^\circ}{v_B} + \underset{60^\circ}{v_{C/B}}$$



$$v_B = \frac{3}{2}\pi L \cos 60 = \frac{3}{4}\pi L$$

$$v_{C/B} = \frac{3}{2}\pi L \operatorname{sen} 60 = \frac{3\sqrt{3}}{4}\pi L$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_B}{L} = \frac{3\pi}{4} \text{ entr.} = \omega_{AB}$$

$$\omega_{BC} = \frac{v_{C/B}}{L\sqrt{3}} = \frac{3\pi}{4} \text{ entr.} = \omega_{BC}$$

La aceleración de C vale,

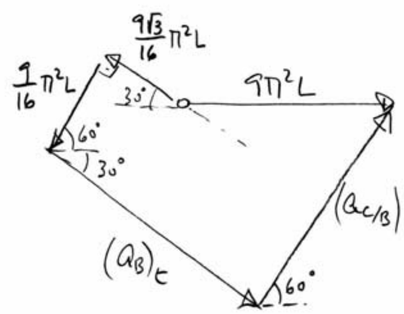
$$a_C = \frac{v_C^2}{L/4} = \frac{4}{L}\,\frac{9}{4}\pi^2 L^2 = 9\pi^2 L \longrightarrow$$

Entonces,

$$a_C = a_B + a_{C/B}$$

$$\underset{9\pi^2 L}{\longrightarrow} \qquad a_B:\ n,\ t \qquad a_{C/B}:\ n,\ t$$

$(a_B)_n$: 30°, $\omega_{AB}^2 L = \frac{9}{16}\pi^2 L$; $(a_B)_t$: 30°, ?; $(a_{C/B})_n$: 30°, $\omega_{BC}^2\sqrt{3}L = \frac{9\sqrt{3}}{16}\pi^2 L$; $(a_{C/B})_t$: ? 60°



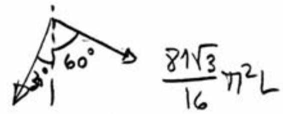
$$(a_B)_t = \frac{9\sqrt{3}}{16}\pi^2 L + 9\pi^2 L\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}\,\pi^2 L\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{2}\right) = \frac{81}{16}\sqrt{3}\,\pi^2 L$$

$$(a_{C/B})_t = \frac{9}{16}\pi^2 L + 9\pi^2 L\,\frac{1}{2} = 9\pi^2 L\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{2}\right) = \frac{81}{16}\pi^2 L$$

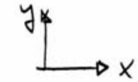
$$\alpha_{AB} = \frac{(a_B)_t}{L} = \frac{81}{16}\sqrt{3}\,\pi^2 \text{ entr.}$$

$$\alpha_{BC} = \frac{(a_{C/B})_t}{L\sqrt{3}} = \frac{81}{16\sqrt{3}}\pi^2 \text{ sal.}$$

Necesitamos calcular la aceleración del centro de gravedad de BC. Será la media entre B y C.

$a_B =$ 

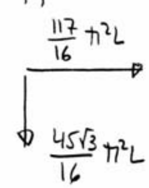
$a_C = \xrightarrow{9\pi^2 L}$

Proyectemos a_B en horizontal y vertical. 

$$a_{Bx} = \frac{81\sqrt{3}}{16}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{9}{16}\cdot\frac{1}{2} = \frac{243}{32} - \frac{9}{32} = \frac{234}{32} = \frac{117}{16}\pi^2 L$$

$$a_{By} = -\left(\frac{81\sqrt{3}}{16}\cdot\frac{1}{2} + \frac{9}{16}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\left(\frac{81\sqrt{3}}{32} + \frac{9\sqrt{3}}{32}\right) = -\frac{45\sqrt{3}}{16}\pi^2 L$$

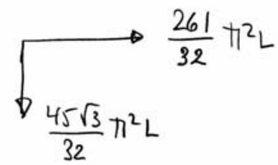
Entonces,

$a_B =$ 

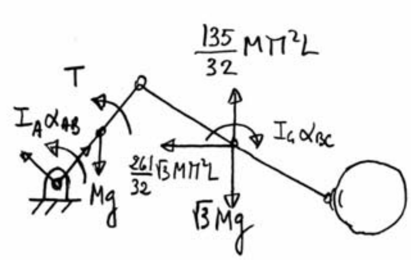
$a_C = \xrightarrow{9\pi^2 L}$

$$\frac{\frac{117}{16}+9}{2} = \frac{261}{32}$$

luego,

$a_G =$ 

Fuerzas aplicadas y de inercia sobre el mecanismo:



Cálculo del par motor: utilizamos un campo de velocidades virtuales que coincide con las velocidades reales.

$$-T\omega_{AB} - I_A\alpha_{AB}\,\omega_{AB} + \frac{Mg}{2}\,\omega_{AB}\,\frac{L}{2} + I_G\,\alpha_{BC}\,\omega_{BC} +$$

$$+\left(\frac{135}{32}M\pi^2L - \sqrt{3}\,Mg\right)v_{Gy} - \frac{261}{32}\sqrt{3}\,M\pi^2L\,v_{Gx} = 0$$

Se necesita la velocidad del centro de gravedad de BC.

$$v_B = \underset{\frac{3}{4}\pi L}{\xrightarrow{30^\circ}} \qquad v_C = \downarrow \frac{3}{2}\pi L$$

$$v_{Gx} = \frac{3}{4}\pi L\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{16}\pi L$$

$$v_{Gy} = -\frac{\frac{3}{2}\pi L + \frac{3}{4}\pi L\frac{1}{2}}{2} = -\frac{15}{16}\pi L$$

$$\omega_{AB} = \frac{3\pi}{4}\;;\; \omega_{BC} = \frac{3\pi}{4}\;;\; \alpha_{AB} = \frac{81}{16}\sqrt{3}\,\pi^2\;;\; \alpha_{BC} = \frac{81}{16\sqrt{3}}\pi^2$$

$$I_A = \left[\frac{1}{12}M\left(\frac{L}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}ML^2\right] = \left(\frac{1}{192} + \frac{1}{3}\right)ML^2 = \frac{65}{192}ML^2$$

$$I_G = \left[\frac{1}{12}\sqrt{3}M\left(\sqrt{3}L\right)^2 + \frac{1}{12}\sqrt{3}M\left(\frac{L}{4}\right)^2\right] = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{192}\right)ML^2 = \frac{49\sqrt{3}}{192}ML^2$$

$$-T\frac{3\pi}{4} - \frac{65}{192}ML^2\,\frac{81}{16}\sqrt{3}\,\pi^2\,\frac{3\pi}{4} + \frac{Mg}{2}\,\frac{3\pi}{4}\,\frac{L}{2} +$$

$$+\frac{49\sqrt{3}}{192}ML^2\,\frac{81}{16\sqrt{3}}\pi^2\,\frac{3\pi}{4} + \left(\frac{135}{32}M\pi^2L - \sqrt{3}\,Mg\right)\left(-\frac{15}{16}\pi L\right) -$$

$$-\frac{261\sqrt{3}}{32}M\pi^2L\,\frac{3\sqrt{3}}{16}\pi L = 0$$

$$\frac{3\pi}{4} T = \cancel{-\frac{15795\sqrt{3}}{12288} M\pi^3 L^2} + \frac{3}{16} Mg\pi L + \cancel{\frac{11907}{12288} M\pi^3 L^2} -$$

$$\cancel{-\frac{2025}{512} M\pi^3 L^2} + \frac{15\sqrt{3}}{16} Mg\pi L - \cancel{\frac{2349}{512} M\pi^3 L^2}$$

$$\frac{3\pi}{4} T = \frac{-15795\sqrt{3} + 11907 - 24\times 2025 - 24\times 2349}{12288} M\pi^3 L^2 +$$

$$+ \frac{3 + 15\sqrt{3}}{16} Mg\pi L$$

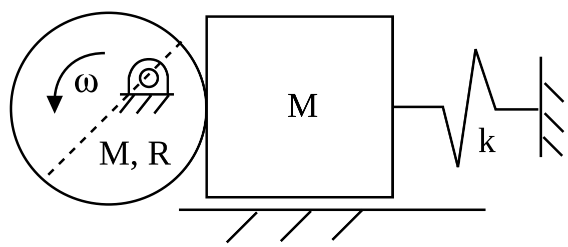
$$\frac{3\cancel{\pi}}{4} T = \frac{3 + 15\sqrt{3}}{16} Mg\cancel{\pi} L - \frac{93069 + 15795\sqrt{3}}{12288} M\pi^{\cancel{3}\,2} L^2$$

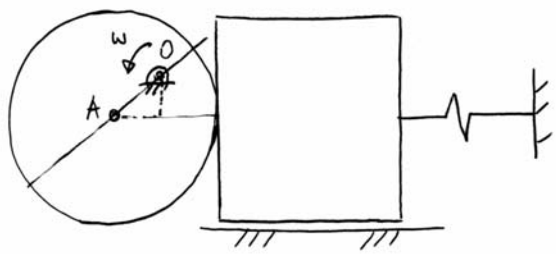
$$T = \frac{1 + 5\sqrt{3}}{4} MgL - \frac{93069 + 15795\sqrt{3}}{9216} M\pi^2 L^2$$

$$\boxed{T = \frac{1+5\sqrt{3}}{4} MgL - \frac{10341 + 1755\sqrt{3}}{1024} M\pi^2 L^2}$$

Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Diciembre 96
Nombre ....

El sistema de la figura está formado por un disco de masa M y radio R que hace de leva, un bloque de masa M y un resorte de rigidez k y longitud natural 2R. El disco se halla articulado al elemento fijo en un punto que dista 0.5R del centro. En la posición que se muestra, la línea discontínua sobre la que se encuentra la articulación está inclinada 45º respecto a la horizontal. El movimiento del sistema es conocido, pues se sabe que el disco gira con velocidad angular constante ω. Si, en el instante representado, la longitud del resorte es 1.5R, calcular el par motor que es necesario aplicar al disco para lograr dicho movimiento en ese instante. No considerar el peso.

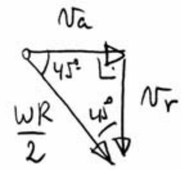




Lo primero es resolver los problemas cinemáticos de velocidad y aceleración.

$$\vec{v}_A = \vec{v}_a + \vec{v}_r \quad \text{(con el bloque)}$$

$\omega \frac{R}{2}$ 45°   — ? | ?

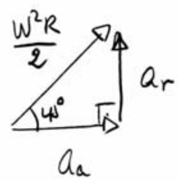


$$v_a = \boxed{\frac{\omega R}{2\sqrt{2}} = v_{Bloque} \rightarrow}$$

$$v_r = \frac{\omega R}{2\sqrt{2}}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_a + \vec{a}_r + \vec{a}_{cor} \quad \text{(con el bloque)}$$

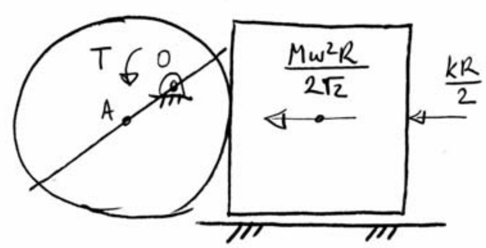
$\omega^2 \frac{R}{2}$ 45°   — ? | ? $\vec{a}_{cor} = \vec{0}$ por ser $\vec{\omega}_a = \vec{0}$



$$a_a = \boxed{\frac{\omega^2 R}{2\sqrt{2}} = a_{bloque} \rightarrow}$$

$$a_r = \frac{\omega^2 R}{2\sqrt{2}}$$

Entonces, las fuerzas que sufre el sistema son,



Para calcular el par motor se puede dar una velocidad virtual al sistema que coincide con la real. Entonces, la potencia virtual será,

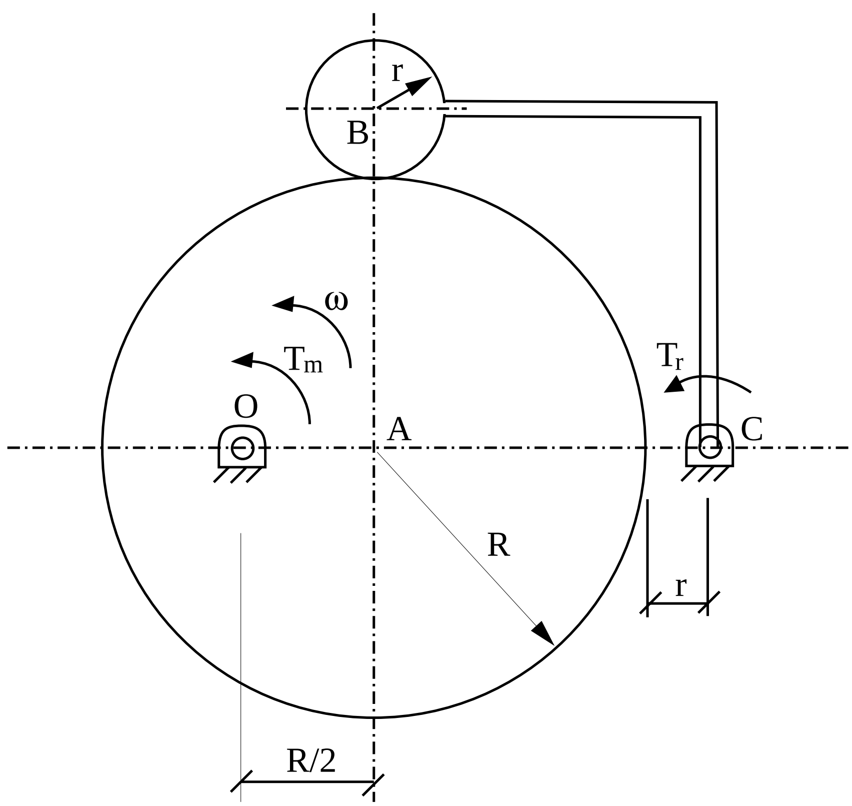
$$T\tilde{\omega} - \left(\frac{M\omega^2 R}{2\sqrt{2}} + \frac{kR}{2}\right)\frac{\tilde{\omega} R}{2\sqrt{2}} = 0$$

$$\boxed{T = \frac{M\omega^2 R^2}{8} + \frac{kR^2}{4\sqrt{2}}}$$

Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Junio 97
Nombre ....

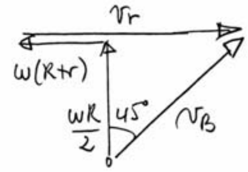
El sistema de la figura representa una leva de disco con seguidor oscilante de pie curvo. El disco es un cilindro de radio R articulado en un punto excéntrico O, y gira con velocidad angular constante ω bajo la acción de un par motor T_m desconocido. El seguidor oscilante está articulado en el punto C y debe vencer un par resistente T_r conocido, que le obliga a mantenerse en contacto con la superficie de la leva. El extremo del seguidor es un cilindro de radio r. La masa de la leva es M, su centro de gravedad está en el punto A, y su momento de inercia es el que corresponde a un cilindro. La masa del seguidor es m y su centro de gravedad está en el punto B, con momento de inercia correspondiente también al de un cilindro. La masa de las barras del seguidor se supone despreciable. Suponiendo que no hay rozamiento entre la leva y el seguidor, y para una relación $R=5r$, determinar, en la posición de la figura:

1) Aceleración angular del seguidor.
2) Par motor T_m.



1) $v_B = v_a + v_r$ (con la leva)

v_B: 45°, ?; $v_a = v_A + v_{B/A}$: $\uparrow \frac{\omega R}{2}$, $\leftarrow \omega(R+r)$; v_r: ?



$v_B = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega R = \omega_s \sqrt{2}(R+r)$

$$\omega_s = \frac{\omega R}{2(R+r)} \text{ antihorario}$$

Haciendo $R = 5r$,

$$\omega_s = \frac{5\omega r}{2\times 6r} = \frac{5}{12}\omega \text{ antihorario}$$

$$v_r = \omega(R+r) + \frac{\omega R}{2} = \frac{3\omega R}{2} + \omega r \text{, y con } R = 5r,$$

$$v_r = \frac{3}{2}\omega 5r + \omega r = \frac{17}{2}\omega r = v_r \rightarrow$$

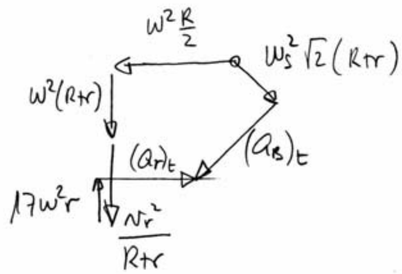
$a_B = a_a + a_r + a_{cor}$ (con la leva)

a_B: n: 45°, $\omega_s^2\sqrt{2}(R+r)$; t: 45°, ?

$a_a = a_A + a_{B/A}$: $\leftarrow \omega^2\frac{R}{2}$, $\downarrow \omega^2(R+r)$

a_r: n: $\downarrow \frac{v_r^2}{R+r}$; t: ?

$a_{cor} = 2\omega\frac{17}{2}\omega r = 17\omega^2 r \uparrow$



<u>Proyección vertical</u>

$$\omega^2(R+r) + \frac{v_r^2}{R+r} = 17\omega^2 r + \omega_s^2\sqrt{2}(R+r)\frac{\sqrt{2}}{2} + (a_B)_t\frac{\sqrt{2}}{2}$$

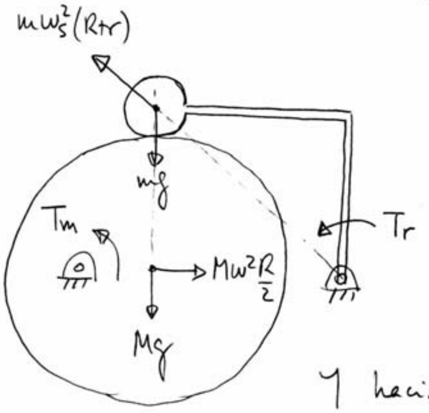
$$6\omega^2 r + \frac{289}{4}\frac{\omega^2 r^2}{6r} = 17\omega^2 r + \frac{25}{144}\omega^2 6r + \frac{(a_B)_t}{\sqrt{2}}$$

$$\left(6 + \frac{289}{24} - 17 - \frac{150}{144}\right)\omega^2 r = \frac{(a_B)_t}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2}\,\frac{864 + 1734 - 2448 - 150}{144}\omega^2 r = (a_B)_t \Rightarrow (a_B)_t = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_s = 0}$$

La aceleración angular del seguidor es nula.

2) Como velocidades virtuales pueden servir las verdaderas velocidades.



$$\dot{\tilde{W}} = -Mg\,\cancel{\tilde{\omega}}\,\frac{R}{2} + T_m\,\cancel{\tilde{\omega}}$$
$$- mg\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\cancel{\tilde{\omega}}\,R\,\frac{\sqrt{2}}{2} - T_r\,\frac{\cancel{\tilde{\omega}}\,R}{2(R+r)} = 0$$

$$T_m = Mg\,\frac{R}{2} + mg\,\frac{R}{2} + T_r\,\frac{R}{2(R+r)}$$

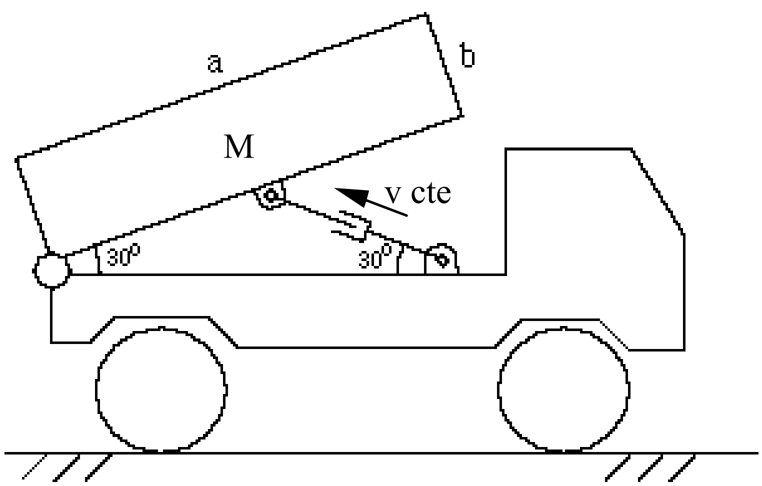
Y haciendo $R = 5r$ queda,

$$T_m = (M+m)g\,\frac{5r}{2} + T_r\,\frac{5r}{2\times 6r} = \boxed{\frac{5}{2}(M+m)\,gr + \frac{5}{12}T_r = T_m}$$

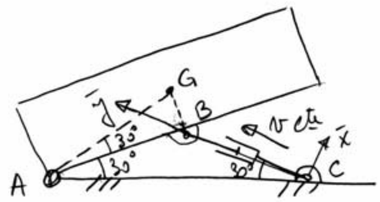
Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Junio 98
Nombre...

El camión de la figura se halla estacionado mientras tiene lugar la descarga del volquete. El volquete se puede considerar homogéneo, de masa M, y dimensiones $a = 2L$ y $b = \frac{2\sqrt{3}}{3} L$. El pistón hidráulico que levanta el volquete se une a éste en el punto medio de la base, y actúa con una velocidad v constante. Determinar, en la posición indicada en la figura:

a) El valor del esfuerzo motor que realiza el pistón hidráulico.
b) El valor de la reacción en la articulación del volquete.
c) Si será preciso tener frenado al camión para que no se mueva.

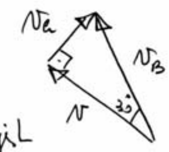


Lo primero es resolver la cinemática.



$v_B = v_a + v_r$ (con ejs)

60° ?   60° ?   30° v



$v_a = v\,tg\,30° = \frac{\sqrt{3}}{3}v = \omega_{ejs} L$

$\omega_{ejs} = \frac{\sqrt{3}\,v}{3L}$ entr.

$v_B = \frac{v}{\cos 30°} = \frac{2v}{\sqrt{3}} = \omega L$

$\boxed{\omega = \frac{2v}{\sqrt{3}\,L}}$ sal

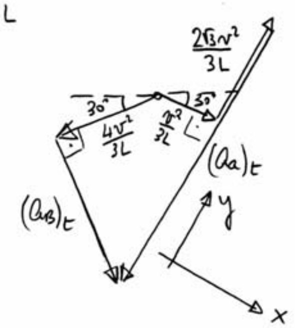
$a_B = a_a + a_r + a_{cor}$ (con ejs)

a_B: n: 30°, $\omega^2 L = \frac{4v^2}{3L}$; t: 60°, ?

a_a: n: 30°, $\omega_{ejs}^2 L = \frac{v^2}{3L}$; t: 60°, ?

$a_r = \emptyset$

a_{cor}: $2\omega_{ejs} v = \frac{2\sqrt{3}\,v^2}{3L}$, 60°



proyección en x

$\frac{v^2}{3L} + \frac{4v^2}{3L}\cdot\frac{1}{2} = (a_B)_t \frac{\sqrt{3}}{2}$

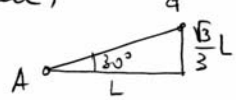
$(a_B)_t = \frac{2v^2}{\sqrt{3}\,L} = \alpha L \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{2v^2}{\sqrt{3}\,L^2} \text{ entr}}$

proyección en y

$(a_a)_t = \frac{2\sqrt{3}\,v^2}{3L} + \frac{4v^2}{3L}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2v^2}{\sqrt{3}\,L}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{3}\,v^2}{3L} = \alpha_{ejs} L \Rightarrow \alpha_{ejs} = \frac{5\sqrt{3}\,v^2}{3L^2}$ sal

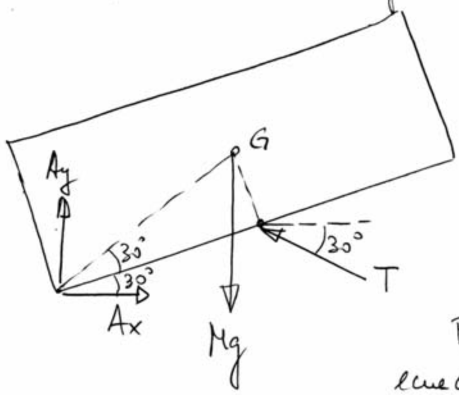
Conocida la velocidad y aceleración angular del volquete, se puede calcular la aceleración del centro de gravedad.

a_G = n: 60°, $\omega^2 \overline{AG} = \frac{8v^2}{3\sqrt{3}\,L}$; t: 30°, $\alpha \overline{AG} = \frac{4v^2}{3L}$



$\overline{AG} = \frac{L}{\cos 30} = \frac{2L}{\sqrt{3}}$

Ahora vamos con el diagrama de sólido libre del volquete.



El momento de inercia del volquete en A vale,

$$I_A = \frac{1}{3} M \left[(2L)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}L\right)^2\right] =$$

$$= \frac{16}{9} M L^2$$

Entonces, ya se pueden plantear las ecuaciones de Newton-Euler para el volquete,

$$\begin{cases} A_x - \frac{\sqrt{3}}{2}T = M\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{8v^2}{3\sqrt{3}L} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{4v^2}{3L}\right) & (1) \\ A_y + \frac{1}{2}T - Mg = M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{8v^2}{3\sqrt{3}L} - \frac{1}{2}\,\frac{4v^2}{3L}\right) & (2) \\ Mg\frac{2L}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}TL = \frac{16}{9}ML^2\,\frac{2v^2}{\sqrt{3}L^2} & (3) \end{cases}$$

a) En la ecuación (3) se obtiene el valor del esfuerzo motor.

$$\boxed{T = \frac{2}{3}Mg - \frac{64}{27}\,\frac{Mv^2}{L}}$$

b) Las dos componentes de la reacción en la articulación del volquete salen de las ecuaciones (1) y (2).

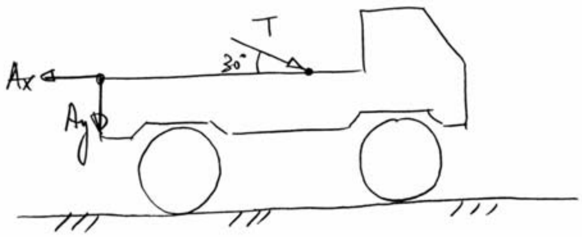
$$A_x = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{2}{3}Mg - \frac{64}{27}\,\frac{Mv^2}{L}\right] - \frac{4}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{Mv^2}{L} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{Mv^2}{L}$$

$$\boxed{A_x = \frac{\sqrt{3}}{3}Mg + \frac{26}{9\sqrt{3}}\cdot\frac{Mv^2}{L}}$$

$$A_y = Mg - \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}Mg - \frac{64}{27}\cdot\frac{Mv^2}{L}\right] - \frac{4}{3}\,\frac{Mv^2}{L} - \frac{2}{3}\,\frac{Mv^2}{L}$$

$$\boxed{A_y = \frac{2}{3}Mg - \frac{22}{27}\,\frac{Mv^2}{L}}$$

c) El camión necesitaría estar frenado si existe una fuerza horizontal que actúe sobre él,



Entonces, la fuerza horizontal que sobre el camión vale,

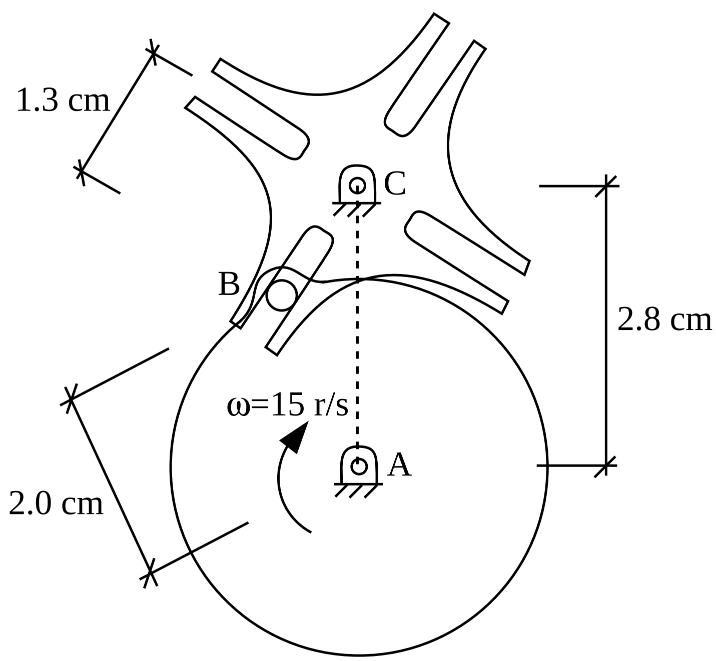
$$F_x = T\cos 30 - A_x = \left[\frac{2}{3}Mg - \frac{64}{27}\frac{Mv^2}{L}\right]\frac{\sqrt{3}}{2} - \left[\frac{\sqrt{3}}{3}Mg + \frac{26}{9\sqrt{3}}\frac{Mv^2}{L}\right] =$$

$$= \boxed{-\frac{58}{9\sqrt{3}}\cdot\frac{Mv^2}{L} = F_x}$$

Luego el camión tendrá tendencia a moverse hacia atrás, por lo que deberá frenarse. Lógicamente, habría que cuantificar el valor de esta fuerza para ver si resulta significativa.

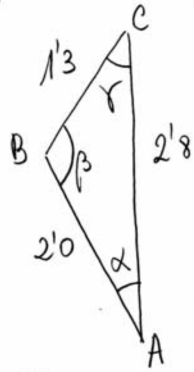
Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Septiembre 98
Nombre ....

El mecanismo de la figura se denomina rueda de Ginebra y se utiliza para generar movimiento intermitente de rotación a partir de una rotación continua. Cuando la pestaña B encaja en la ranura de la rueda de Ginebra, ésta gira 90º, para permanecer después quieta hasta que B dé otra vuelta completa y vuelva a encajar con la siguiente ranura.



Sobre el eje A del disco actúa un par motor T que lo hace girar con una velocidad angular constante de 15 r/s, mientras que en el eje C de la rueda de Ginebra actúa un par resistente de 50 Nm que se opone al movimiento.
Determinar, para la posición de la figura, el valor del par motor T. El momento de inercia de la rueda de Ginebra con respecto a su centro C es de 2 Kg cm^2.

Lo primero es resolver la cinemática, y, para ello, la geometría. Aplicando el teorema del coseno tenemos,



$$1'3^2 = 2^2 + 2'8^2 - 2\times 2\times 2'8\cos\alpha \Rightarrow \alpha = 25'01^\circ$$

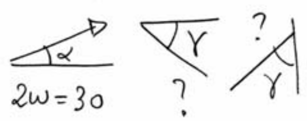
Y ahora, aplicando el teorema del seno,

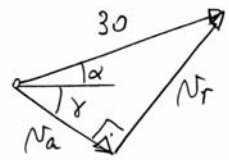
$$\frac{1'3}{\operatorname{sen} 25'01^\circ} = \frac{2}{\operatorname{sen}\gamma} \Rightarrow \gamma = 40'57^\circ$$

$$\frac{2'8}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{1'3}{\operatorname{sen} 25'01^\circ} \Rightarrow \beta = 114'41^\circ$$

Ahora vamos a resolver el problema de velocidades.

$v_B = v_a + v_r$ (con la rueda de ginebra)





$\alpha+\gamma = 25'01^\circ + 40'57^\circ = 65'58^\circ$

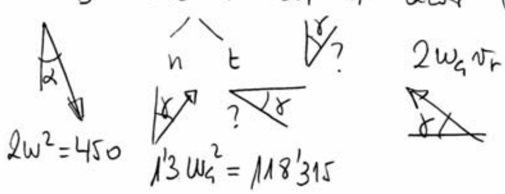
$v_a = 30\cos(\alpha+\gamma) = 30\cos 65'58^\circ = 12'4 = \omega_4\, 1'3$

$\boxed{\omega_4 = 9'54\ r/s\ \circlearrowright\ \text{saliente}}$

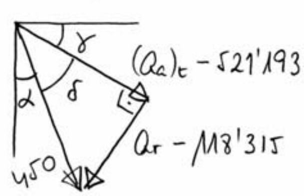
$v_r = 30\operatorname{sen}(\alpha+\gamma) = 30\operatorname{sen} 65'58^\circ = 27'316\ cm/s$

Y el de aceleraciones,

$a_B = a_a + a_r + a_{cor}$ (con la rueda de ginebra)



$2\omega_4 v_r = 2\times 9'54\times 27'316 = 521'193$



$\delta = 90^\circ - \alpha - \gamma = 90^\circ - 25'01^\circ - 40'57^\circ =$
$= 24'42^\circ = \delta$

Proyectando se tiene,

$$450\cos\delta = (a_a)_t - 521'193$$

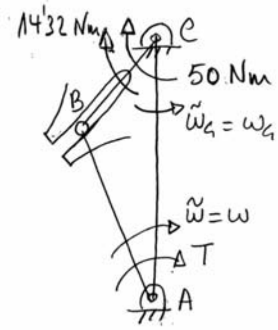
$$(a_a)_t = 450\cos 24'42^\circ + 521'193 = 930'936 = \alpha_G\, 1'3$$

$$\boxed{\alpha_G = 716'104\ r/s^2 \text{ saliente}}$$

$$450\,\text{sen}\,\delta = a_r - 118'315$$

$$a_r = 450\,\text{sen}\,24'42^\circ + 118'315 = 304'355\ cm/s^2 = a_r$$

Ahora vamos a considerar las fuerzas y momentos que actúan sobre el sistema.



El momento resultante en C de las fuerzas de inercia de la rueda de ginebra vale,

$$-I_C\alpha_G = -2\times10^{-2}\times 716'104 =$$
$$= -14'32\ \text{Nm}$$

donde el signo menos indica sentido contrario a α_G, es decir, entrante.

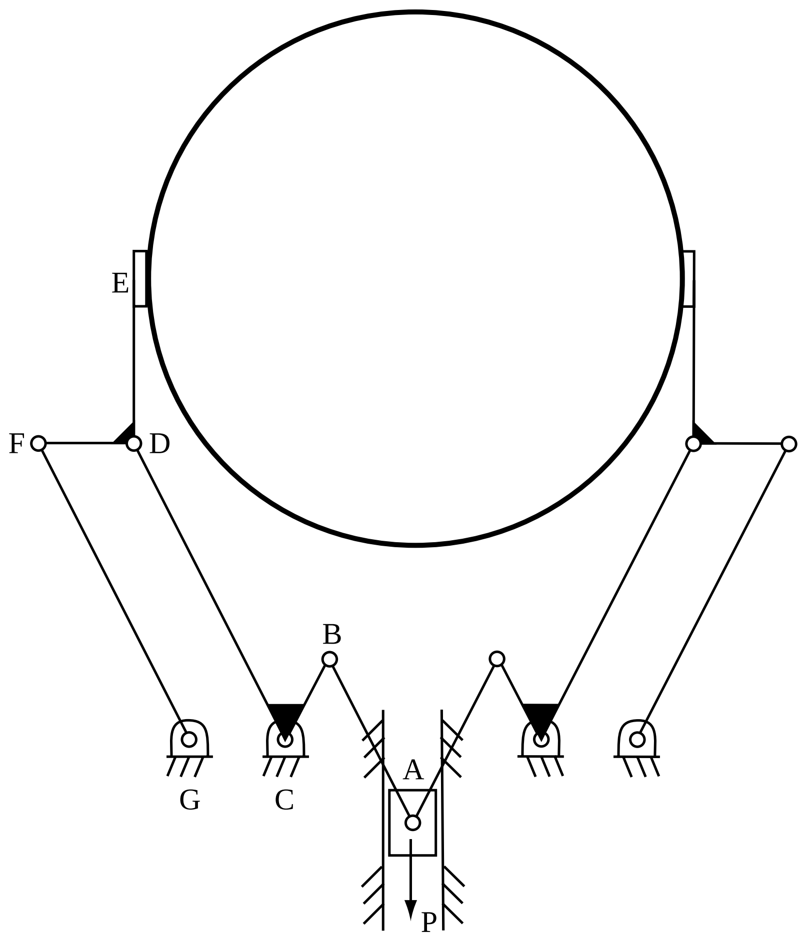
Aplicando el teorema de las potencias virtuales, tomando como velocidad virtual de entrada la verdadera velocidad angular del disco, tenemos,

$$T\times 15 - 50\times 9'54 - 14'32\times 9'54 = 0$$

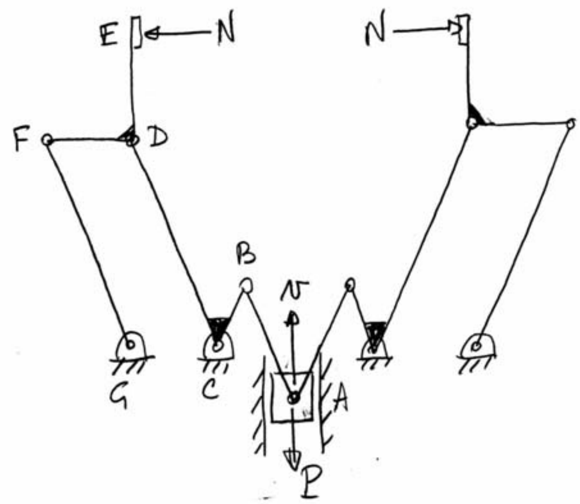
$$\boxed{T = 40'9\ \text{Nm}}$$

Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Septiembre 99
Nombre ....

La figura muestra un mecanismo de pinza de los que van montados en la mano de los robots y sirven a éstos para agarrar objetos. En este caso, el objeto se ha representado por una circunferencia en trazo grueso. El funcionamiento del sistema es el siguiente: un motor lineal ejerce una fuerza sobre el pistón A, y el mecanismo, simétrico respecto a la vertical que pasa por A, transmite esa fuerza hasta las pinzas que agarran el objeto. Las dimensiones son: AB=DE=L, BC=DF=CG=0.5L, CD=FG=2L. Los puntos fijos C y G están sobre la misma horizontal. En la posición de la figura, FD se halla horizontal y DE vertical, mientras que AB, BC, CD y FG forman 60º con la horizontal.



Si P es el valor de la fuerza que actúa sobre el pistón A, determinar, en la posición de la figura, la fuerza normal de agarre de las pinzas sobre el objeto en función de P. No se considera rozamiento entre las pinzas y el objeto, ni tampoco acción gravitatoria sobre el sistema.

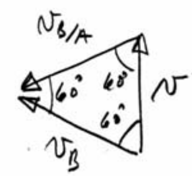


Las fuerzas que actúan sobre el sistema son P (motor) y N (fuerza de agarre sobre el objeto). Entonces, la aplicación del teorema de las potencias virtuales proporcionará fácilmente el valor de N en función de P.

Comenzamos calculando el valor de la velocidad del punto E en función de la velocidad de A, supuesta vertical y ascendente, de valor v (todas las velocidades son virtuales, no existen realmente).

$$v_B = v_A + v_{B/A}$$

30° ? $\quad$ v $\quad$ 30° ?



$$v_B = v = \omega_{BCD}\frac{L}{2} \Rightarrow \omega_{BCD} = \frac{2v}{L} \text{ saliente}$$

$$v_D = \omega_{BCD}\,2L = \frac{2v}{L}\,2L = 4v \ (30^\circ) = v_E$$

Entonces, por el teorema de las potencias virtuales,

$$\dot{W} = -Pv + N\,4v\cos 30 + N\,4v\cos 30 = 0$$

$$\boxed{N = \frac{P}{4\sqrt{3}}}$$