Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Junio 95

Nombre ....

El sistema de la figura es un modelo simplificado de un vehículo y se encuentra sometido a la acción de la gravedad. Sus características son: masa m=10 Kg, rigidez del resorte k=1000 N/m, constante del amortiguador c=10 Ns/m.

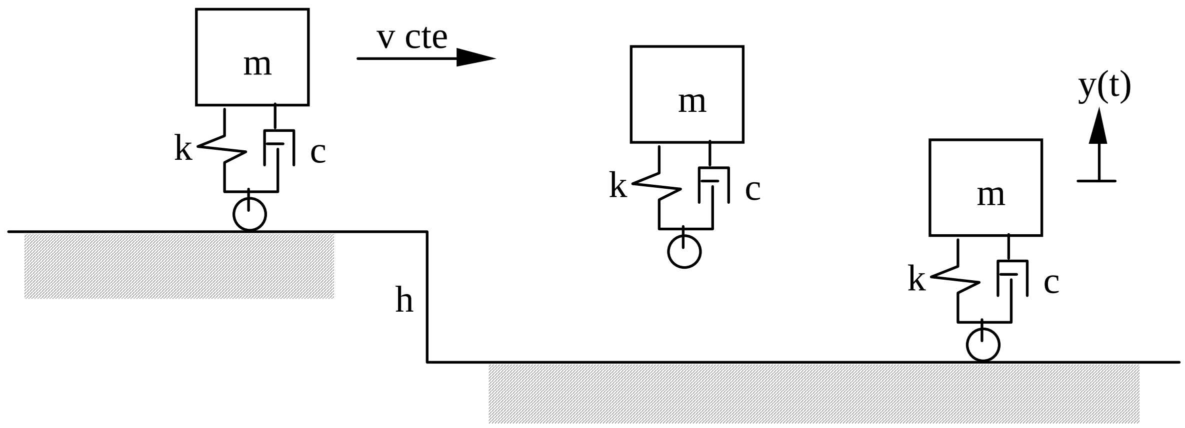
El móvil avanza con velocidad constante v por la pista horizontal y, en un cierto instante, encuentra un escalón descendente de altura h=0.5 m. Durante el salto, se activa un dispositivo de bloqueo que impide que varíe la distancia relativa entre el bloque y la rueda. Este dispositivo se libera justo en el momento del contacto de la rueda con el suelo

Obtener:

a) Tiempo que dura el vuelo del móvil.

b) Distancia desde el escalón a la que toma contacto con el suelo la rueda del móvil tras el salto.

c) Función y(t) que exprese las oscilaciones verticales del bloque a lo largo del tiempo a partir del contacto con el suelo, tomando como tiempo cero el instante del aterrizaje.



a) El vuelo del móvil se trata de un simple tiro parabólico.

$$h = \frac{1}{2} g t^{*2}$$

$$t^* = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 0'5}{9'81}} = \boxed{0'3193 \text{ s} = t^*}$$

b) Como en dirección horizontal la velocidad es constante,

$$d^* = v t^* = \boxed{0'3193\, v = d^*}$$

c) Se trata de un problema de vibraciones libres, con condiciones iniciales $y_0 = 0$, $\dot{y}_0 = -v_y$, siendo,

$$v_y = g t^* = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9'81 \times 0'5} = 3'1321 \text{ m/s}$$

Entonces,

$$y_0 = 0 \ ; \ \dot{y}_0 = -3'1321 \text{ m/s}$$

$$y(t) = e^{-\xi \omega t} (A \operatorname{sen} \omega_D t + B \cos \omega_D t)$$

$$\underline{t = 0,\ y = 0} \Rightarrow B = 0$$

$$y(t) = A e^{-\xi \omega t} \operatorname{sen} \omega_D t$$

$$\dot{y}(t) = A(-\xi \omega e^{-\xi \omega t} \operatorname{sen} \omega_D t + e^{-\xi \omega t} \omega_D \cos \omega_D t)$$

$$\underline{t = 0,\ \dot{y} = \dot{y}_0}$$

$$\dot{y}_0 = A \omega_D \Rightarrow A = \frac{\dot{y}_0}{\omega_D}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{\dot{y}_0}{\omega_D} e^{-\xi \omega t} \operatorname{sen} \omega_D t}$$

$m = 10 \text{ kg}$, $K = 1000 \text{ N/m}$, $c = 10 \text{ Ns/m}$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1000}{10}} = 10 \text{ r/s}$$

$$\bar{c} = 2 m \omega = 2 \times 10 \times 10 = 200 \text{ Ns/m}$$

$$\xi = \frac{c}{\bar{c}} = \frac{10}{200} = 0'05$$

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} = 10 \sqrt{1 - 0'05^2} = 9'9875 \text{ r/s}$$

Por tanto, la solución es,

$$y(t) = -\frac{3'1321}{9'9875} e^{-0'5t} \operatorname{sen} 9'9875 t$$

$$\boxed{y(t) = -0'3136 \, e^{-0'5t} \operatorname{sen} 9'9875 t}$$

Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Septiembre 95

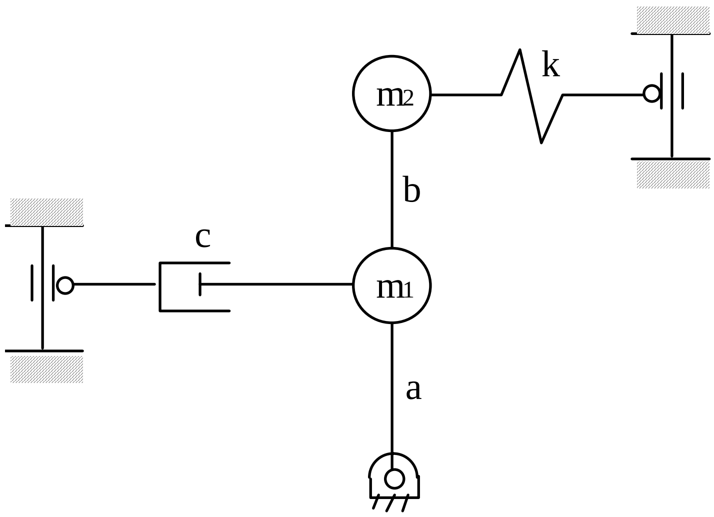
Nombre ....

Para el sistema de la figura:

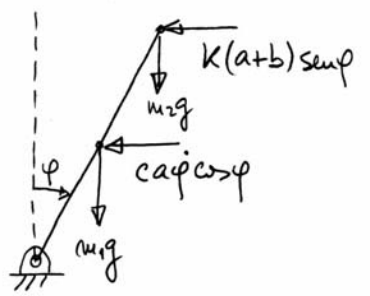
a) Obtener la ecuación diferencial del movimiento en pequeñas oscilaciones.

b) Si se toma, m_1=1 Kg, m_2=2 Kg, k=1000 N/m, c=10 Ns/m, a=2 m, b=1 m, calcular la posición del sistema transcurridos tres segundos, suponiendo que el desplazamiento inicial es nulo y la velocidad angular inicial es de 5 rad/s.

c) ¿Cómo es el amortiguamiento obtenido? (crítico, subcrítico, supercrítico).



a)



$$N_O = I_O \ddot{\varphi}$$

$$-k(a+b)^2 \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi - ca^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi + m_1 g a \operatorname{sen}\varphi + m_2 g (a+b)\operatorname{sen}\varphi =$$
$$= \left[m_1 a^2 + m_2 (a+b)^2\right]\ddot{\varphi}$$

$$\left[m_1 a^2 + m_2 (a+b)^2\right]\ddot{\varphi} + ca^2\dot{\varphi} + \left[k(a+b)^2 - m_1 g a - m_2 g (a+b)\right]\varphi = 0$$

b) Esta ecuación es equivalente a $m_e\ddot{\varphi} + c_e\dot{\varphi} + k_e\varphi = 0$,
siendo, $m_e = m_1 a^2 + m_2 (a+b)^2 = 22 \text{ kgm}^2$

$c_e = ca^2 = 40 \text{ Nsm}$

$k_e = k(a+b)^2 - m_1 g a - m_2 g (a+b) = 8921'52 \text{ Nm}$

Entonces

$$\omega = \sqrt{\frac{k_e}{m_e}} = \sqrt{\frac{8921'52}{22}} = 20'138 \ r/s$$

$$\bar{c} = 2m_e\omega = 2 \times 22 \times 20'138 = 886'072$$

$$\xi = \frac{c_e}{\bar{c}} = \frac{40}{886'072} = 0'045$$ amortiguamiento subcrítico $\xi < 1$

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2} = 20'138\sqrt{1-0'045^2} = 20'118 \ r/s$$

La respuesta del sistema es,

$$\varphi(t) = e^{-\xi\omega t}\left(A\cos\omega_D t + B\operatorname{sen}\omega_D t\right)$$

Las condiciones iniciales nos darán las constantes A y B.

$\underline{t=0,\ \varphi=0} \Rightarrow A=0$

$$\dot\varphi(t) = B\left[-\xi\omega e^{-\xi\omega t}\,\text{sen}\,\omega_D t + e^{-\xi\omega t}\,\omega_D \cos\omega_D t\right]$$

$\underline{t=0,\ \dot\varphi=5}$

$$5 = B\omega_D \Rightarrow B = \frac{5}{\omega_D} = \frac{5}{20'118} = 0'2485$$

Luego,

$$\boxed{\varphi(t) = 0'2485\, e^{-0'906\,t}\,\text{sen}(20'118\,t)}$$

Cuando $t=3$,

$$\varphi(t=3) = -0'0101 \text{ rad} = -0'579^\circ$$

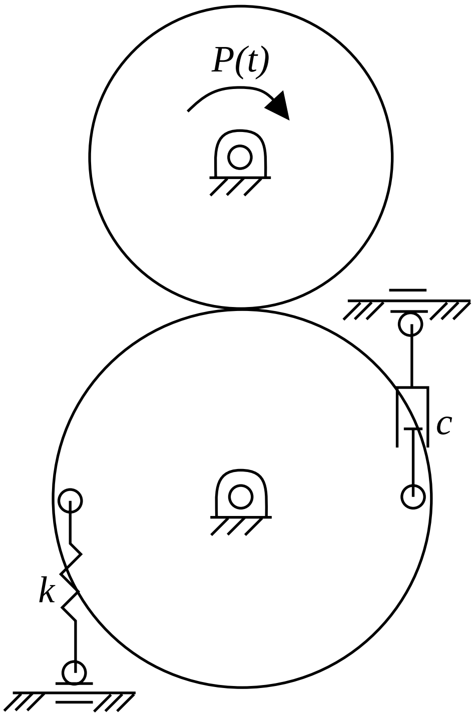
c) Como ya se ha visto, el amortiguamiento es <u>subcrítico.</u>

Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Junio 98

Nombre...

La figura muestra dos engranajes de módulo 4 mm, de 30 y 45 dientes con correcciones positivas de 0.2096 y 0.3145, respectivamente, realizadas para adaptar el engrane a la distancia existente entre ejes. La masa del piñón es 1.1 Kg y la de la rueda 2.45 Kg. A efectos de cálculo de inercias, ambos engranajes pueden considerarse cilindros homogéneos de radio igual al radio primitivo de funcionamiento.

Sobre el piñón actúa un par variable con el tiempo de valor $P(t)$=0.03senΩt Nm, según se indica en la figura. Por otro lado, la rueda tiene conectados, a una distancia del centro igual a su radio primitivo de funcionamiento, un resorte de rigidez k=100 N/m, y un amortiguador cuya constante es c=4 Ns/m.



Determinar:

a) Angulo de presión de funcionamiento y radios primitivos de funcionamiento.

b) Ecuación diferencial del movimiento vibratorio de la rueda.

c) Frecuencia natural y amortiguamiento relativo del sistema.

d) Frecuencia Ω, en herzios, del par excitador para la cual la amplitud de la respuesta estacionaria del sistema es máxima y valor de la misma, en grados.

a) Las condiciones de funcionamiento de las ruedas se obtendrán a partir de las correcciones.

$$Ev(\varphi_v) = Ev(\varphi) + 2\,\frac{x_1+x_2}{z_1+z_2}\,\mathrm{tg}\,\varphi =$$

$$= Ev(20) + 2\,\frac{0'2096+0'3145}{30+45}\,\mathrm{tg}\,20 = 0'019991 \Rightarrow \boxed{\varphi_v = 21'98^\circ}$$

Los radios primitivos de las ruedas valen,

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{m z_1}{2} = \frac{4\times 30}{2} = 60 \text{ mm} \\ R_2 &= \frac{m z_2}{2} = \frac{4\times 45}{2} = 90 \text{ mm} \end{aligned}\right\} d = 150 \text{ mm}$$

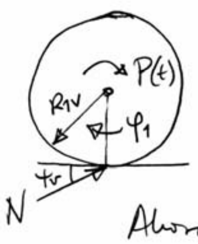
y los radios de funcionamiento,

$$R_1 \cos\varphi = R_{1v}\cos\varphi_v \Longrightarrow R_{1v} = \frac{60\cos 20}{\cos 21'98} = \boxed{60'8 = R_{1v}}$$

$$R_2 \cos\varphi = R_{2v}\cos\varphi_v \Longrightarrow R_{2v} = \frac{90\cos 20}{\cos 21'98} = \boxed{91'2 = R_{2v}}$$

luego la distancia de funcionamiento es $d_v = 152$ mm.

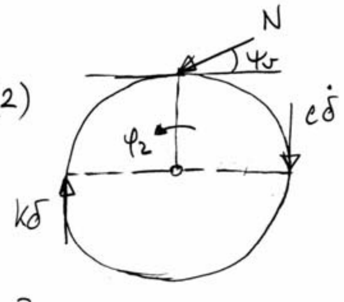
b) Si se aísla el piñón se tiene,



$$P(t) - N R_{1v}\cos\varphi_v = I_1\ddot{\varphi}_1 \quad \text{, luego,}$$

$$N = \frac{P - I_1\ddot{\varphi}_1}{R_{1v}\cos\varphi_v} \qquad (1)$$

Ahora, aislando la rueda,



$$N R_{2v}\cos\varphi_v - R_{2v}k\delta - R_{2v}c\dot{\delta} = I_2\ddot{\varphi}_2 \quad (2)$$

Además, se cumple que,

$$\delta = R_{2v}\varphi_2 \;;\; \dot{\delta} = R_{2v}\dot{\varphi}_2$$

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2\frac{z_2}{z_1} \;;\; \frac{R_{2v}}{R_{1v}} = \frac{z_2}{z_1}$$

Entonces, introduciendo todo en la ecuación (2) resulta,

$$\frac{P - I_1\ddot{\varphi}_1}{R_{1v}\cos\psi_v} R_{2v}\cos\psi_v - k R_{2v}^2 \varphi_2 - c R_{2v}^2 \dot{\varphi}_2 = I_2 \ddot{\varphi}_2$$

$$\left(P - I_1 \frac{z_2}{z_1}\ddot{\varphi}_2\right)\frac{z_2}{z_1} - k R_{2v}^2 \varphi_2 - c R_{2v}^2 \dot{\varphi}_2 = I_2 \ddot{\varphi}_2$$

$$\boxed{\left[I_2 + I_1\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2\right]\ddot{\varphi}_2 + c R_{2v}^2 \dot{\varphi}_2 + k R_{2v}^2 \varphi_2 = \frac{z_2}{z_1} P(t)}$$

que es la ecuación diferencial del movimiento vibratorio de la rueda, siendo,

$$I_1 = \frac{1}{2} m_1 R_{1v}^2 = \frac{1}{2} \times 1'1 \times (60'8 \cdot 10^{-3})^2 = 2033 \cdot 10^{-6} \ kg m^2$$

$$I_2 = \frac{1}{2} m_2 R_{2v}^2 = \frac{1}{2} \times 2'45 \times (91'2 \cdot 10^{-3})^2 = 10189 \cdot 10^{-6} \ kg m^2$$

c) Si se consideran los valores numéricos, la ecuación diferencial queda,

$$14763'25 \cdot 10^{-6} \ddot{\varphi}_2 + 0'03327 \dot{\varphi}_2 + 0'831744 \varphi_2 = 0'045 \operatorname{sen} \Omega t$$

equiparable a la ecuación general $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$.

Entonces, la frecuencia natural del sistema vale,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{0'831744}{14763'25 \cdot 10^{-6}}} = \boxed{7'51 \ r/s = 1'195 \ Hz = \omega}$$

El amortiguamiento crítico,

$$\bar{c} = 2m\omega = 2 \times 14763'25 \cdot 10^{-6} \times 7'51 = 0'221744$$

y el amortiguamiento relativo,

$$\xi = \frac{c}{\bar{c}} = \frac{0'03327}{0'221744} = \boxed{0'15 = \xi}$$

d) La amplitud de la respuesta estacionaria será máxima para,

$$\beta = \sqrt{1 - 2\xi^2} = \sqrt{1 - 2 \times 0'15^2} = 0'977$$

Luego esto implica una frecuencia excitadora,

$$\Omega = \beta \omega = 0'977 \times 7'51 = 7'34 \text{ rad} = \boxed{1'168 \text{ Hz} = \Omega}$$

El valor de la respuesta a esa frecuencia será,

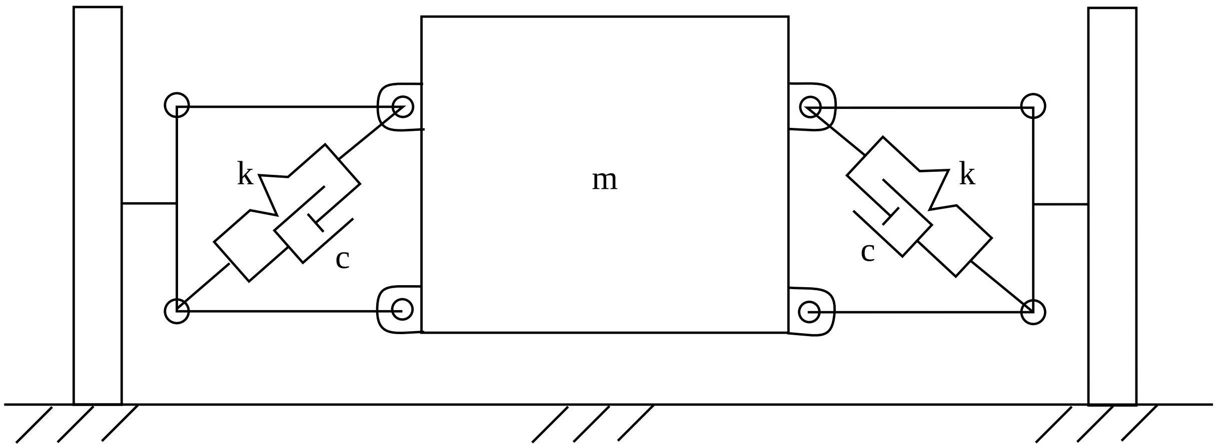
$$\varphi_2 = \frac{f_0}{k} D_{máx} = \frac{f_0}{k} \cdot \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{0'045}{0'831744} \cdot \frac{1}{2 \times 0'15\sqrt{1-0'15^2}} =$$

$$= 0'1824 \text{ rad} = \boxed{10'45^\circ = \varphi_2}$$

Lo que significa que la hipótesis de movimiento de pequeña amplitud es válida.

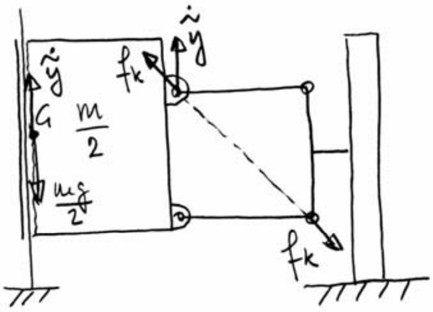
Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Junio 99
Nombre ....

La figura muestra la vista frontal de un vehículo con sus dos suspensiones delanteras. Se desea estudiar la dinámica del movimiento vertical del vehículo, suponiendo que ambas ruedas son completamente rígidas y se hallan en todo momento a la misma altura y en contacto con el suelo. La masa del vehículo a considerar es *m* (aproximadamente, la mitad de la masa total del vehículo, ya que sólo se modeliza la mitad delantera del mismo), la rigidez de los resortes *k*, y la constante de los amortiguadores *c*. Todas las barras de las suspensiones tienen igual longitud, de valor *l*. Las masas de barras y ruedas se consideran despreciables frente a *m*. El sistema sufre la acción de la gravedad.



a) Si la posición de equilibrio del vehículo es la que muestra la figura, con las barras de los cuadriláteros formando ángulo recto entre ellas, determinar la longitud natural de los resortes.
b) Obtener la ecuación del movimiento de pequeñas vibraciones del sistema alrededor de la posición de equilibrio, considerando vibraciones libres.
c) Si m=500 Kg, g=9.81 m/s^2, k=10000 N/m, l=0.3 m, deducir el valor de la constante de los amortiguadores c que hace que el amortiguamiento relativo del sistema sea de 0.05.

a) Dada la simetría del sistema, se puede considerar sólo la mitad del mismo. Para conocer la longitud natural de los resortes, hay que averiguar la fuerza que están haciendo en la posición de equilibrio.



Como en dicha posición sólo actúa el peso y la fuerza de los resortes, aplicando el teorema de potencias virtuales,

$$\tilde{\dot W} = -\frac{mg}{2}\cancel{\tilde{\dot y}} + f_k \cancel{\tilde{\dot y}}\cos 45 = 0 \Rightarrow f_k = \frac{\sqrt{2}mg}{2}$$

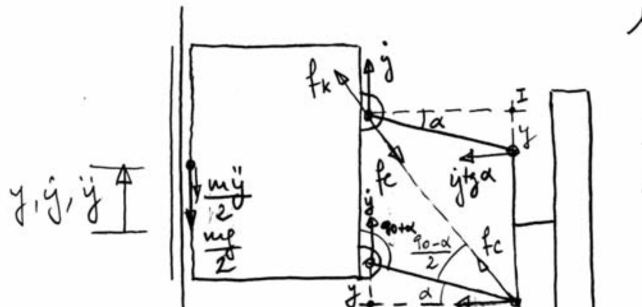
Ahora bien, como

$$f_k = k\delta_0 = \frac{\sqrt{2}\,mg}{2} \Rightarrow \delta_0 = \frac{\sqrt{2}\,mg}{2k}$$ a compresión.

Entonces, la longitud natural es,

$$l_0 = \sqrt{2}\,l + \frac{\sqrt{2}\,mg}{2k} = \boxed{\sqrt{2}\left(l + \frac{mg}{2k}\right) = l_0}$$

b) Para la ecuación del movimiento situaremos al sistema en una posición genérica. Las fuerzas que actúan y las velocidades de los puntos se muestran en la figura.



Vamos a comenzar calculando el valor de la fuerza del resorte. Para ello, será necesario averiguar cuál es su longitud en la posición genérica.

El ángulo "α" se relaciona con el gdl "y", mediante

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{l}$$

Por ejemplo, aplicando el teorema del coseno,

$$l_K^2 = l^2 + l^2 - 2l^2 \cos(90+\alpha) = 2l^2(1+\operatorname{sen}\alpha)$$

$$l_K = l\sqrt{2}\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha}$$

luego la fuerza del resorte vale,

$$f_K = K(l_0 - l_K) = K\left[\sqrt{2}\left(l + \frac{mg}{2K}\right) - \sqrt{2}\,l\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha}\right]$$

Para conocer la fuerza del amortiguador hay que calcular la velocidad que separa los extremos en la posición genérica.

$$v = \dot{y}\cos\frac{90-\alpha}{2} - \dot{y}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{sen}\frac{90-\alpha}{2}$$, siendo,

$$\cos\frac{90-\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos(90-\alpha)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\operatorname{sen}\frac{90-\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos(90-\alpha)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}$$, queda,

$$v = \dot{y}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}\right]$$

Y la fuerza en el amortiguador vale,

$$f_c = cv = c\dot{y}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}\right]$$

Conocidas todas las fuerzas se puede aplicar de nuevo el teorema de potencias virtuales para obtener la ecuación del movimiento. Las velocidades virtuales pueden tomarse coincidentes con las reales.

$$\dot{\tilde{W}} = -\frac{m}{2}(g+\ddot{y})\cancel{\dot{\tilde{y}}} + (f_K - f_c)\left[\cancel{\dot{\tilde{y}}}\cos\frac{90-\alpha}{2} - \cancel{\dot{\tilde{y}}}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{sen}\frac{90-\alpha}{2}\right] =$$

$$= -\frac{mg}{2} - \frac{m\ddot{y}}{2} + (f_K - f_c)\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}\right] = 0$$

A partir de aquí hay que realizar operaciones.

$$-\frac{mg}{2} - \frac{m\ddot{y}}{2} + \left[k\sqrt{2}\left(l + \frac{mg}{2k} - l\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha}\right) - \right.$$

$$\left. - c\dot{y}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}\right)\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}\right] = 0$$

$$-\frac{mg}{2} - \frac{m\ddot{y}}{2} + \left(kl + \frac{mg}{2}\right)\left[\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}\right] - kl\,(1+\operatorname{sen}\alpha) +$$

$$+ kl\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha - \frac{c\dot{y}}{2}\left[1+\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{tg}\alpha\cos\alpha - \operatorname{tg}\alpha\cos\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha\,(1-\operatorname{sen}\alpha)\right] = 0$$

$$-\frac{mg}{2} - \frac{m\ddot{y}}{2} + \left(kl + \frac{mg}{2}\right)\left[\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}\right] - kl - \cancel{kl\operatorname{sen}\alpha} +$$

$$+ \cancel{kl\operatorname{sen}\alpha} - \frac{c\dot{y}}{2}\left[1 + \cancel{\operatorname{sen}\alpha} - \cancel{\operatorname{sen}\alpha} - \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{sen}\alpha\right] = 0$$

$$-\frac{mg}{2} - \frac{m\ddot{y}}{2} + \left(kl + \frac{mg}{2}\right)\left[\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}\right] - kl -$$

$$- \frac{c\dot{y}}{2}\left[1 - \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{sen}\alpha\right] = 0$$

Si ahora se tiene en cuenta que estamos en vibraciones, es decir que "y" es pequeño y, por tanto, "α" es pequeño, tenemos que,

$\operatorname{sen}\alpha \simeq \alpha$, $\operatorname{tg}\alpha \simeq \alpha$, $\sqrt{1+\alpha} \simeq 1 + \frac{\alpha}{2}$, $\sqrt{1-\alpha} \simeq 1 - \frac{\alpha}{2}$

Entonces, despreciando los términos en α^2 y potencias superiores,

$$-\frac{mg}{2} - \frac{m\ddot{y}}{2} + \left(kl + \frac{mg}{2}\right)\left[1 + \frac{\alpha}{2} - \alpha\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right] - kl +$$

$$- \frac{c\dot{y}}{2}\,(1-\alpha) = 0$$

$$-\frac{mg}{2} - \frac{m\ddot{y}}{2} + \left(kl + \frac{mg}{2}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) - kl - \frac{c\dot{y}}{2}\,(1-\alpha) = 0$$

$$-\cancel{\frac{mg}{2}} - \frac{m\ddot{y}}{2} + \cancel{kl} + \cancel{\frac{mg}{2}} - \frac{kl}{2}\alpha - \frac{mg}{4}\alpha - \cancel{kl} - \frac{c\dot{y}}{2} + \frac{c\dot{y}}{2}\alpha = 0$$

Cambiando todo de signo y multiplicando por 2,

$$m\ddot{y} + kl\alpha + \frac{mg}{2}\alpha + c\dot{y} - c\dot{y}\alpha = 0$$

Ahora bien, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{l} \Rightarrow \alpha = \frac{y}{l}$, luego,

$$m\ddot{y} + ky + \frac{mg}{2l}y + c\dot{y} - c\dot{y}\frac{y}{l} = 0$$

El término $\frac{1}{2}cy\dot{y}$ puede despreciarse ya que en una solución oscilatoria (sin amortiguamiento), $\dot{y} = wy$, de donde el producto $y\dot{y} = wy^2$. Si la frecuencia no es elevada (se verá que en este caso no lo es), el término es despreciable por aparecer y^2. Entonces,

$$\boxed{m\ddot{y} + c\dot{y} + \left(k + \frac{mg}{2l}\right)y = 0}$$

Ecuación del movimiento de vibraciones libres.

c) La frecuencia natural del sistema es,

$$w = \sqrt{\frac{k + \frac{mg}{2l}}{m}} = \sqrt{\frac{10000 + \frac{500 \times 9'81}{2 \times 0'3}}{500}} = 6'029 \text{ rad/s}$$

El amortiguamiento crítico,

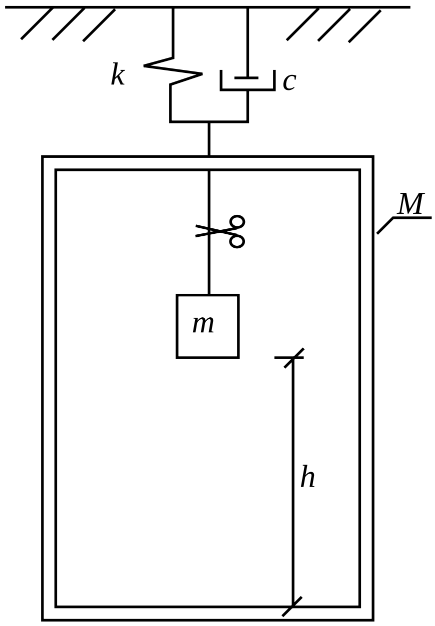
$$\bar{c} = 2mw = 2 \times 500 \times 6'029 = 6029 \text{ Ns/m}$$

Por tanto, para un amortiguamiento relativo de 0'05,

$$\xi = \frac{c}{\bar{c}} \;;\quad 0'05 = \frac{c}{6029} \Rightarrow \boxed{c = 301'45 \text{ Ns/m}}$$

Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Septiembre 99
Nombre ....

La figura muestra una caja de masa *M* suspendida de un muelle de rigidez *k* y un amortiguador de constante *c*. Dentro de la caja, se halla suspendido un bloque de masa *m* merced a un hilo inextensible. La distancia entre la parte inferior del bloque y el suelo de la caja es *h*.
Estando el conjunto en reposo, se corta el hilo del que cuelga el bloque, produciéndose la caída del mismo.



Si los valores de los parámetros son M=100 Kg, m=20 Kg, k=400 N/m, c=10 Ns/m, h=2 m, y el valor de la gravedad se considera g=9.81 m/s^2, determinar:
a) El movimiento de la caja desde que se corta el hilo hasta que el bloque golpea con el suelo la misma.
b) Instante en que se produce el impacto.

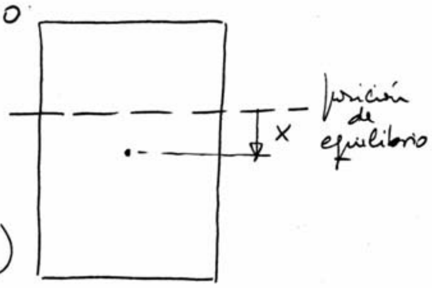
a) Al cortar el hilo, el sistema pasa a ser un sistema vibratorio de 1 gdl con masa M, rigidez K y amortiguamiento c, que se mueve en vibraciones libres con unas condiciones iniciales

$$x_0 = \frac{Mg}{K} \; ; \; \dot{x}_0 = 0 .$$

La ecuación diferencial del movimiento de la caja es, por tanto,

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0 \Rightarrow 100\ddot{x} + 10\dot{x} + 400x = 0$$

con $x_0 = \frac{20 \times 9'81}{400} = 0'4905$ y $\dot{x}_0 = 0$. La solución a esta ecuación será,



$$x(t) = e^{-\xi\omega t}\left(x_0 \cos\omega_D t + \frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} \operatorname{sen}\omega_D t\right)$$

Calculemos los distintos parámetros.

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{400}{100}} = 2 \text{ r/s}$$

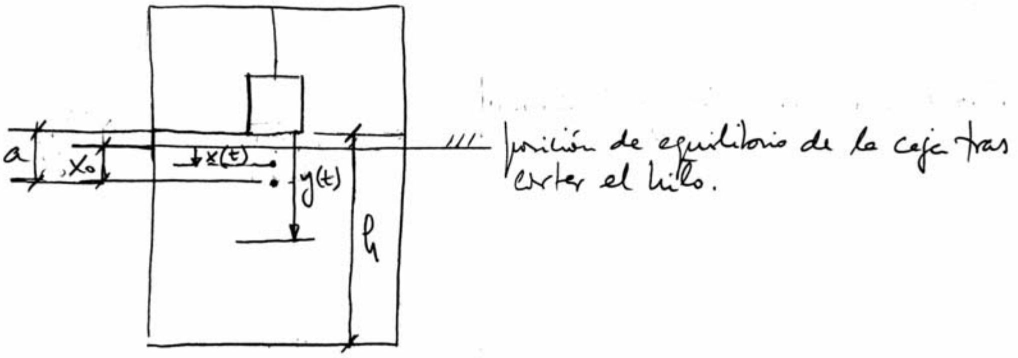
$$\xi = \frac{c}{\bar{c}} = \frac{c}{2M\omega} = \frac{10}{2 \times 100 \times 2} = 0'025 \; ; \; \xi\omega = 0'025 \times 2 = 0'05$$

$$\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2} = 2\sqrt{1 - 0'025^2} = 1'9994$$

$$\frac{\dot{x}_0 + \xi\omega x_0}{\omega_D} = \frac{0 + 0'025 \times 2 \times 0'4905}{1'9994} = 0'0123$$

$$\boxed{x(t) = e^{-0'05t}\left(0'4905 \cos 1'9994t + 0'0123 \operatorname{sen} 1'9994t\right)}$$

b) Para conocer el instante en que se produce el impacto, hay que remitirse a la siguiente figura:



La caída del bloque se produce según un movimiento uniformemente acelerado bajo la acción de la gravedad,

$$y(t) = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2}\, 9'81\, t^2 = 4'905\, t^2 = y(t)$$

Para el impacto ha de cumplirse la siguiente igualdad

$$y(t) = (a - x_0) + x(t) + (h - a)$$

$$\boxed{y(t) = x(t) + h - x_0}$$, es decir,

$$4'905\, t^2 = e^{-0'05t}\left(0'4905 \cos 1'9994t + 0'0123 \,\text{sen}\, 1'9994t\right) + 2 - 0'4905$$

Esto se puede escribir como,

$$f(t) = e^{-0'05t}\left(0'4905 \cos 1'9994t + 0'0123 \,\text{sen}\, 1'9994t\right) - 4'905\, t^2 + 1'5095 = 0$$

que se resuelve por el método iterativo de Newton,

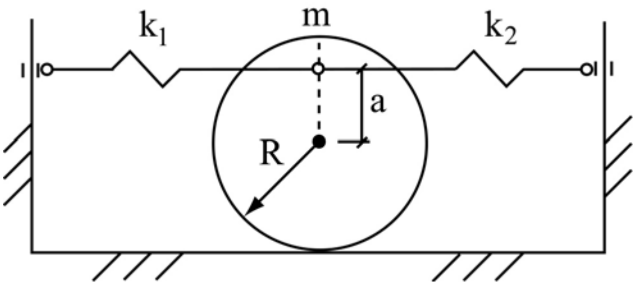
$$t_{i+1} = t_i - \frac{f(t_i)}{f'(t_i)}$$

t_i	$f(t_i)$	$f'(t_i)$	t_{i+1}
0'63	-0'2804	-7'0855	0'5904
0'5904	-0'0081	-6'6731	0'5892
0'5892	$-7'798 \cdot 10^{-6}$	-6'6603	0'5892

Luego el choque se produce en $\underline{t = 0'5892 \text{ segundos}}$.

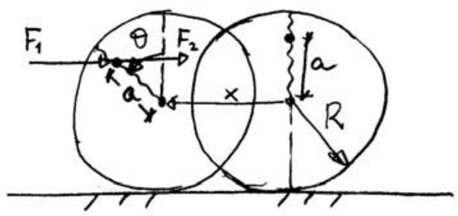
Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Septiembre 03
Nombre ....

La figura muestra un disco de masa m y radio R, que rueda sin deslizar sobre el suelo plano, y está sometido a la acción de la gravedad. En un punto del disco, a una distancia a del centro, se hallan conectados dos resortes, de constantes k_1 y k_2, que actúan siempre en dirección horizontal.



El sistema se halla en equilibrio en la posición mostrada en la figura, en la que ambos muelles están descargados.

a) Determinar la frecuencia natural de vibración del sistema.
b) Si el coeficiente de rozamiento entre el disco y el suelo es 0.15, calcular el máximo ángulo, en grados, que puede girar el disco sin que se produzca deslizamiento, para el caso de que los parámetros del sistema sean: m=1 kg, R=0.1 m, k_1= k_2=1000 N/m, a=0.04 m, g=9.81 m/s^2.



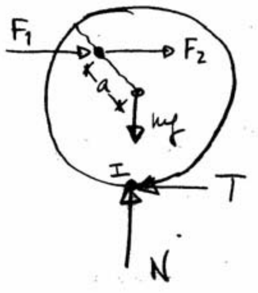
a) Debido a la rodadura, el avance del disco y el ángulo girado están relacionados:

$$x = R\theta$$

Entonces, cuando el disco gira θ, las fuerzas que realizan los resortes son:

$$F_1 = k_1\left(x + a\,\mathrm{sen}\,\theta\right) = k_1\left(R\theta + a\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$$

$$F_2 = k_2\left(x + a\,\mathrm{sen}\,\theta\right) = k_2\left(R\theta + a\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$$



El conjunto de fuerzas que actúan sobre el disco, cuando éste ha girado un ángulo θ desde la posición de equilibrio, se muestran en la figura de la izquierda.

Dado que, al haber rodadura, el punto del disco en contacto con el suelo tiene velocidad nula, se puede aplicar la ecuación de momentos en dicho punto, en la forma:

$$\Sigma M_I = I_I\alpha$$

$$-\left(F_1+F_2\right)\left(R+a\cos\theta\right) = \left(\frac{1}{2}mR^2 + mR^2\right)\ddot{\theta}$$

$$-\left(k_1+k_2\right)\left(R\theta + a\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\left(R+a\cos\theta\right) = \left(\frac{1}{2}mR^2 + mR^2\right)\ddot{\theta}$$

Reorganizando la ecuación queda,

$$\frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta} + \left(k_1+k_2\right)\left(R\theta + a\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\left(R+a\cos\theta\right) = 0$$

Y, teniendo en cuenta que θ pequeño, $\mathrm{sen}\,\theta \simeq \theta$, $\cos\theta \simeq 1$,

$$\frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta} + \left(k_1+k_2\right)\left(R+a\right)^2\theta = 0$$

Así pues, la frecuencia natural del sistema de 1 grado de libertad será,

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{(k_1+k_2)(R+a)^2}{1'5\, m R^2}}}$$

b) Si, además de la ecuación de momentos sobre el disco, se plantean también las ecuaciones de fuerza en horizontal y vertical, se tiene:

$$\left\{\begin{array}{lcl} -(F_1+F_2)+T = m\ddot{x} & \longrightarrow & T = m\ddot{x} + F_1 + F_2 \\ N - mg = 0 & \longrightarrow & N = mg \end{array}\right.$$

Elaborando más el resultado de T,

$$T = mR\ddot{\theta} + (k_1+k_2)(R\theta + a\,\text{sen}\,\theta)$$

y aplicando la hipótesis de θ pequeño, $\text{sen}\,\theta \simeq \theta$,

$$T = mR\ddot{\theta} + (k_1+k_2)(R+a)\theta$$

Si ahora se añade la ecuación de momentos, que dio lugar a la ecuación del movimiento obtenida en el apartado anterior,

$$\left\{\begin{array}{l} T = mR\ddot{\theta} + (k_1+k_2)(R+a)\theta \\ \frac{3}{2} m R^2 \ddot{\theta} + (k_1+k_2)(R+a)^2\theta = 0 \end{array}\right.$$

se pueden despejar $\ddot{\theta}$ y T en función de θ.

$$\ddot{\theta} = -\frac{2}{3mR^2}(k_1+k_2)(R+a)^2\theta$$

$$T = \left[1 - \frac{2}{3R}(R+a)\right](k_1+k_2)(R+a)\,\theta \leq \mu N = \mu m g$$

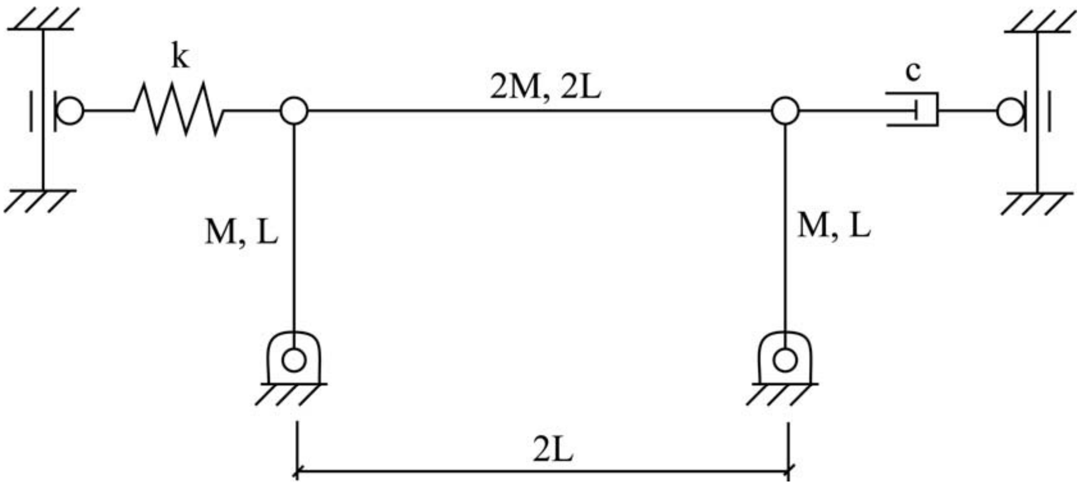
Entonces,

$$\theta \leq \frac{\mu m g}{\left[1-\frac{2}{3R}(R+a)\right](k_1+k_2)(R+a)} = \frac{0'15 \times 1 \times 9'81}{\left[1-\frac{2}{3\times 0'1}(0'1+0'04)\right](1000+1000)(0'1+0'04)} =$$

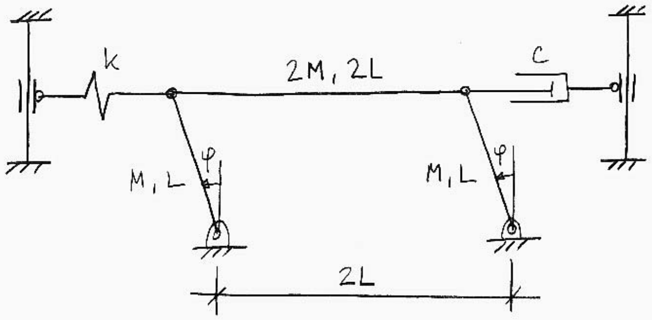
$$= 0'07883 \text{ rd} = \boxed{4'52^\circ = \theta_{máx}}$$

Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Junio 08
Nombre ....

El cuadrilátero articulado de la figura, sometido a la acción de la gravedad, se encuentra en equilibrio en la posición indicada.
a) Obtener la ecuación del movimiento vibratorio libre del sistema alrededor de la posición de equilibrio.



Si los parámetros del sistema toman los valores M=5 kg, L=30 cm, c=25 Ns/m, k=800 N/m, g=9.81 m/s^2:
b) Indicar si la posición de equilibrio es o no estable.
c) Calcular la frecuencia natural y el amortiguamiento relativo del sistema.
d) Calcular la frecuencia con que vibrará libremente el sistema.
Nota: proporcionar todos los resultados en unidades del S.I.



$$T = 2\times\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\dot{\varphi}^2\right] + \frac{1}{2}\,2M\,(L\dot{\varphi})^2 = \frac{4}{3}ML^2\dot{\varphi}^2$$

$$V = 2Mg\frac{L}{2}\cos\varphi + 2MgL\cos\varphi + \frac{1}{2}k\,(L\,\mathrm{sen}\,\varphi)^2 =$$

$$= 3MgL\cos\varphi + \frac{1}{2}kL^2\,\mathrm{sen}^2\varphi$$

$$L = T - V = \frac{4}{3}ML^2\dot{\varphi}^2 - 3MgL\cos\varphi - \frac{1}{2}kL^2\,\mathrm{sen}^2\varphi$$

$$Q_\varphi = -(cL\dot{\varphi}\cos\varphi)\,L\cos\varphi = -cL^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{8}{3}ML^2\dot{\varphi} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \frac{8}{3}ML^2\ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = 3MgL\,\mathrm{sen}\,\varphi - \frac{1}{2}kL^2\,\mathrm{sen}\,2\varphi$$

$$\frac{8}{3}ML^2\ddot{\varphi} + cL^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi + \frac{1}{2}kL^2\,\mathrm{sen}\,2\varphi - 3MgL\,\mathrm{sen}\,\varphi = 0$$

Como φ es pequeño $\begin{cases}\mathrm{sen}\,\varphi \simeq \varphi \\ \cos\varphi \simeq 1\end{cases}$

$$\boxed{\frac{8}{3}ML\ddot{\varphi} + cL\dot{\varphi} + (kL - 3Mg)\varphi = 0}$$

Ecuación del movimiento vibratorio

$$m_e = \frac{8}{3}ML \quad ; \quad c_e = cL \quad ; \quad k_e = kL - 3Mg$$

Si $M = 5$ kg, $L = 30$ cm, $C = 25 \frac{Ns}{m}$, $k = 800 \frac{N}{m}$, $g = 9'81$ m/s² :

$$m_e = \frac{8}{3} ML = \frac{8}{3} 5 \times 0'3 = 4$$

$$C_e = CL = 25 \times 0'3 = 7'5$$

$$k_e = kL - 3Mg = 800 \times 0'3 - 3 \times 5 \times 9'81 = 92'85 > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ el sistema es estable.

$$\omega = \sqrt{\frac{k_e}{m_e}} = \sqrt{\frac{92'85}{4}} = \boxed{4'82 \text{ rad/s} = \omega}$$ Frecuencia natural

$$\bar{C} = 2 m_e \omega = 2 \times 4 \times 4'82 = 38'56$$

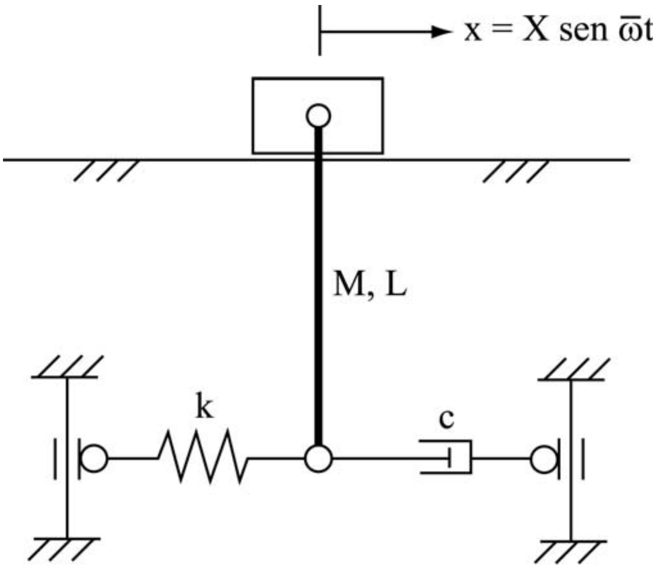
$$\xi = \frac{C_e}{\bar{C}} = \frac{7'5}{38'56} = \boxed{0'1945 = \xi}$$ Amortiguamiento relativo

$$\omega_d = \omega\sqrt{1-\xi^2} = 4'82\sqrt{1-0'1945^2} = \boxed{4'73 \text{ rad/s} = \omega_d}$$

Frecuencia amortiguada (con la que vibrará libremente el sistema)

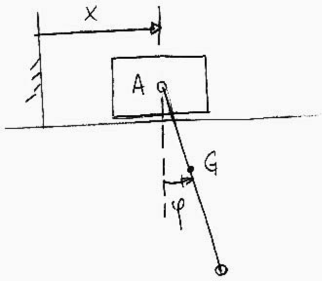
Examen de TEORIA DE MAQUINAS – Septiembre 08
Nombre ....

En el mecanismo de la figura, el bloque tiene impuesto un movimiento armónico conocido, que provoca la vibración de la barra de longitud L y masa M uniformemente repartida.



a) Obtener la energía cinética de la barra.
b) Obtener la energía potencial (gravitatoria y elástica) del sistema.
c) Obtener la ecuación del movimiento vibratorio de la barra.
d) Indicar el valor de la rigidez equivalente, el amortiguamiento equivalente, y la masa equivalente (coeficientes que acompañan en la ecuación del movimiento a la variable que lo describe, a su derivada, y a su derivada segunda, respectivamente).
e) Indicar el valor de la amplitud de la fuerza o fuerzas armónicas excitadoras.

Si se sabe que M=1 kg, L=30 cm, c=10 Ns/m, k=300 N/m, g=9.81 m/s^2, X=1 cm, y la frecuencia con que se mueve el bloque es de 4 Hz, determinar:
f) Frecuencia natural y amortiguamiento relativo de la barra, en unidades del S.I.
g) Factor de amplificación dinámica.
h) Amplitud, en grados, del movimiento vibratorio de la barra.



a) $v_G = v_A + v_{G/A}$

$$T = \frac{1}{2}M\left[\left(\dot{x}+\frac{L}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi\right)^2+\left(\frac{L}{2}\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi\right)^2\right]+$$

$$+\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ML^2\right)\dot{\varphi}^2 =$$

$$= \boxed{\frac{1}{6}ML^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}ML\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi = T}$$

b) $V = -Mg\frac{L}{2}\cos\varphi + \frac{1}{2}k\left(x+L\,\mathrm{sen}\,\varphi\right)^2 =$

$$= \boxed{\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}kL^2\,\mathrm{sen}^2\varphi + kLx\,\mathrm{sen}\,\varphi - Mg\frac{L}{2}\cos\varphi = V}$$

c) $L = T-V = \frac{1}{6}ML^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}ML\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi +$

$+\ Mg\frac{L}{2}\cos\varphi - \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kL^2\,\mathrm{sen}^2\varphi - kLx\,\mathrm{sen}\,\varphi$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{1}{3}ML^2\dot{\varphi}+\frac{1}{2}ML\dot{x}\cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \frac{1}{3}ML^2\ddot{\varphi}+\frac{1}{2}ML\ddot{x}\cos\varphi-\frac{1}{2}ML\dot{x}\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = -\frac{1}{2}ML\dot{x}\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi - Mg\frac{L}{2}\,\mathrm{sen}\,\varphi - \frac{1}{2}kL^2\,\mathrm{sen}\,2\varphi - kLx\cos\varphi$$

$$Q_\varphi = -c\left(\dot{x}+L\dot{\varphi}\cos\varphi\right)L\cos\varphi = -c\dot{x}L\cos\varphi - cL^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi} = Q_\varphi \quad ; \quad \varphi \text{ pequeño} \begin{cases}\mathrm{sen}\,\varphi \simeq \varphi\\ \cos\varphi\simeq 1\end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\ddot{\varphi}+\left(cL^2\right)\dot{\varphi}+\left(kL^2+Mg\frac{L}{2}\right)\varphi =$$

$$= -\frac{1}{2}ML\ddot{x} - cL\dot{x} - kLx$$

y sustituyendo x y sus derivadas por su valor,

$$\boxed{\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\ddot{\varphi} + \left(cL^2\right)\dot{\varphi} + \left(kL^2 + Mg\frac{L}{2}\right)\varphi = \\ = \left(\frac{1}{2}M\bar{\omega}^2 - k\right)LX \operatorname{sen}\bar{\omega}t - c\bar{\omega}LX\cos\bar{\omega}t}$$

d) Si se identifica la ecuación anterior con la ecuación general de un sistema de 1 grado de libertad sometido a excitación armónica, se tiene,

$$m_e\ddot{\varphi} + c_e\dot{\varphi} + k_e\varphi = f_1 \operatorname{sen}\bar{\omega}t - f_2\cos\bar{\omega}t$$

Entonces,

$$\boxed{m_e = \frac{1}{3}ML^2 \quad ; \quad c_e = cL^2 \quad ; \quad k_e = kL^2 + Mg\frac{L}{2}}$$

e) Fuerza excitadora en seno: $f_1 = \left(\frac{1}{2}M\bar{\omega}^2 - k\right)LX$

Fuerza excitadora en coseno: $f_2 = c\bar{\omega}LX$

Amplitud de la fuerza total:

$$f_0 = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} = \boxed{\left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}M\bar{\omega}^2 - k\right)^2 + \left(c\bar{\omega}\right)^2}\right)LX = f_0}$$

f) $M = 1\,kg$, $L = 0'3\,m$, $c = 10\,Ns/m$, $k = 300\,N/m$, $g = 9'81\,m/s^2$,
$X = 0'01\,m$, $\bar{\omega} = 2\pi f = 2\pi \times 4 = 25'13\,rad/s$

$$m_e = \frac{1}{3}ML^2 = \frac{1}{3}\times 1 \times 0'3^2 = 0'03$$

$$c_e = cL^2 = 10 \times 0'3^2 = 0'9$$

$$k_e = kL^2 + Mg\frac{L}{2} = 300 \times 0'3^2 + 1 \times 9'81 \times \frac{0'3}{2} = 28'4715$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_e}{m_e}} = \sqrt{\frac{28'4715}{0'03}} = \boxed{30'81 \ rad/s = \omega_1}$$ Frecuencia natural

$$\bar{c} = 2 m_e \omega = 2 \times 0'03 \times 30'81 = 1'8486$$

$$\xi = \frac{c_e}{\bar{c}} = \frac{0'9}{1'8486} = \boxed{0'487 = \xi}$$ Amortiguamiento relativo

g) $$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} = \frac{25'13}{30'81} = 0'816$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-0'816^2)^2 + (2 \times 0'487 \times 0'816)^2}} =$$

$$= \boxed{1'16 = D}$$ Factor de amplificación dinámica

h) La amplitud de la excitación es:

$$f_0 = \sqrt{\left(\frac{1}{2} M\bar{\omega}^2 - k\right)^2 + (c\bar{\omega})^2} \ L X =$$

$$= \left(\sqrt{\left(\frac{1}{2} \times 1 \times 25'13^2 - 300\right)^2 + (10 \times 25'13)^2}\right) \times 0'3 \times 0'01 = 0'7554$$

Entonces, la amplitud de la respuesta será,

$$\varphi_0 = \frac{f_0}{k_e} D = \frac{0'7554}{28'4715} 1'16 = 0'03 \ rad = \boxed{1'76^\circ = \varphi_0}$$