

CAPITULO 1: MODELIZACION DE SISTEMAS MECANICOS

De manera general, puede decirse que las coordenadas con que se modeliza un sistema mecánico son aquel conjunto de parámetros cuyo valor define perfectamente la posición del sistema. Por tanto, la variación de estos parámetros a lo largo del tiempo describe el movimiento.

La elección de las coordenadas que van a definir un sistema mecánico o mecanismo es de gran trascendencia, ya que determina aspectos fundamentales del análisis. A continuación se presentan los distintos tipos de coordenadas que se utilizan para definir mecanismos.

1. Coordenadas independientes.

Modelizar un mecanismo en coordenadas independientes quiere decir emplear tantos parámetros como grados de libertad posea el mecanismo. Se trata, por tanto, del número mínimo de coordenadas posible.

Como ejemplo, obsérvese la figura 1. En la parte izquierda se muestra un mecanismo clásico de cadena cerrada, el cuadrilátero articulado, que posee un único grado de libertad. Sólo precisa por tanto de un parámetro para la definición de su movimiento. Dicho parámetro puede ser el ángulo que forma una de las barras unidas al elemento fijo con la horizontal. En la parte derecha aparece un mecanismo de cadena abierta, un robot plano de tres grados de libertad. Serán pues necesarios tres parámetros para definir el movimiento de dicho robot. Pueden emplearse como tales los ángulos entre elementos sucesivos.

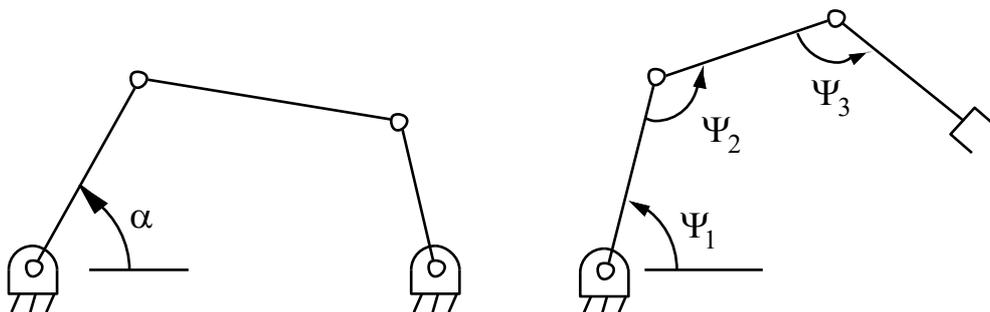


Figura 1. Coordenadas independientes.

La ventaja de estas coordenadas radica en su reducido número —el mínimo posible—, ya que el número de coordenadas determina el tamaño final del problema. Son muy adecuadas cuando se trata de resolver mecanismos de cadena abierta, ya que se adaptan perfectamente a su naturaleza. En el robot de

la figura 1 resulta evidente que, conocidos los valores de los tres ángulos indicados, es inmediatamente conocida la posición de todo el mecanismo.

Sin embargo, en el caso de cadenas cerradas, el uso de coordenadas independientes exige la resolución de un problema cinemático complicado para determinar la posición del sistema correspondiente a un determinado valor de los parámetros. Es más, puede ocurrir que dicho problema no tenga una única solución, es decir, que los parámetros elegidos no definan unívocamente la posición del mecanismo. Así, en el cuadrilátero articulado de la figura 1, dado un valor del ángulo α , no es inmediato conocer la posición de todas las barras del mecanismo. De hecho, para un cierto valor del ángulo, caben dos posiciones posibles del mecanismo. Esto se aprecia en la figura 2.

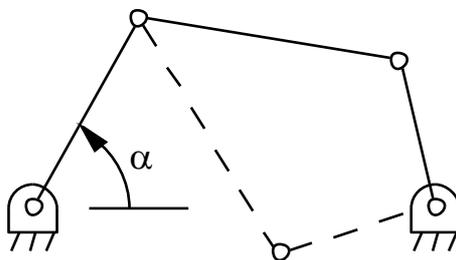


Figura 2. Soluciones múltiples.

Por lo tanto, no parece que este tipo de coordenadas sean adecuadas para un método de propósito general.

2. Coordenadas dependientes: ecuaciones de restricción.

Se dice que las coordenadas utilizadas para definir la posición de un sistema mecánico son dependientes si su número es mayor que el número de grados de libertad del sistema. El objetivo es emplear suficientes variables para definir perfectamente la posición de cada elemento del mecanismo. De esta forma se evitan las dificultades que aparecían con coordenadas independientes.

Dado que se cuenta con más parámetros que grados de libertad, existirán unas relaciones que los ligen. Estas relaciones se denominan ecuaciones de restricción. Si designamos por n al número de coordenadas dependientes utilizado, g al número de grados de libertad del mecanismo y r al número de ecuaciones de restricción que aparecen entre las coordenadas, ha de cumplirse la relación,

$$r = n - g \quad (1)$$

Se ha dicho que lo característico de las coordenadas dependientes es que definen perfectamente la posición de cada elemento del mecanismo. Sin

embargo, esto puede lograrse de muchas formas. Los tres tipos clásicos de coordenadas dependientes son: coordenadas relativas, coordenadas de punto de referencia y coordenadas naturales. Todas ellas se describen a continuación.

2.1 Coordenadas relativas.

Estas coordenadas fueron las primeras en ser utilizadas. Sitúan cada elemento del mecanismo con respecto al anterior en la cadena cinemática. Se hallan, por tanto, asociadas a los pares cinemáticos del mecanismo. En cada par serán necesarias tantas coordenadas como grados de libertad relativos permita el par entre los elementos que une. La figura 3 muestra un mecanismo plano modelizado con coordenadas relativas.

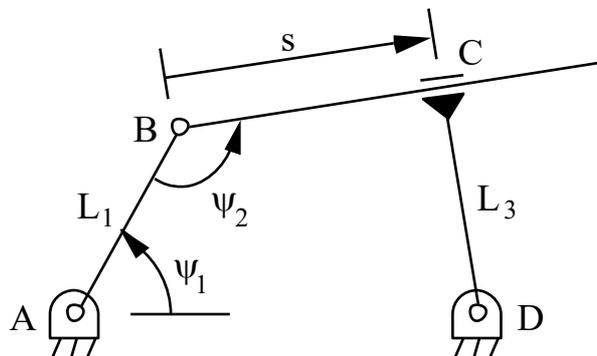


Figura 3. Coordenadas relativas.

Las ecuaciones de restricción que ligan las variables proceden de la condición de cierre de los distintos lazos que componen la cadena cinemática del mecanismo. Así, en el ejemplo de la figura 3 sólo hay un lazo. La condición de cierre del mismo se expresa matemáticamente como,

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0} \quad (2)$$

Esta es una ecuación vectorial en el plano, que equivale a dos ecuaciones escalares. Es fácil justificar que han de existir dos ecuaciones de restricción entre las variables. Basta para ello aplicar la relación dada por (1). En este caso, $n=3$, pues hay tres coordenadas relativas, $g=1$, pues el mecanismo tiene un grado de libertad y, por tanto, $r=n-g=3-1=2$, son las ecuaciones de restricción.

La expresión vectorial consignada en (2) puede expandirse en dos ecuaciones escalares como se indica a continuación.

$$L_1 \cos \psi_1 + s \cos(\psi_1 + \psi_2 - \pi) + L_3 \sin(\psi_1 + \psi_2 - \pi) - L_4 = 0 \quad (3)$$

$$L_1 \sin \psi_1 + s \sin(\psi_1 + \psi_2 - \pi) - L_3 \cos(\psi_1 + \psi_2 - \pi) = 0 \quad (4)$$

La principal ventaja de las coordenadas relativas es su reducido número, que conduce a un tamaño del problema pequeño. También facilitan la consideración de fuerzas y momentos aplicados en los pares cinemáticos. En el caso particular de mecanismos de cadena abierta, las coordenadas relativas son independientes, pues coinciden con el número de grados de libertad del sistema, no existiendo ecuaciones de restricción que las ligen.

Un inconveniente radica en la dificultad de automatizar la determinación de los distintos lazos cinemáticos independientes del mecanismo, de manera que puedan establecerse las ecuaciones de restricción. Además, a partir de los valores numéricos de las coordenadas en un instante, no es posible determinar inmediatamente la posición de un elemento cualquiera, sino que hay que situar previamente a todos los elementos que le preceden en la cadena cinemática. Indicar también que las formulaciones a que dan lugar estas coordenadas son complicadas y la evaluación de los términos que resultan –véanse las ecuaciones de restricción (3) y (4) donde aparecen numerosas funciones trigonométricas– de elevado coste computacional.

2.2 Coordenadas de punto de referencia.

Estas coordenadas sitúan a cada elemento del mecanismo con independencia de los demás. Para ello, se eligen las coordenadas de un punto cualquiera del elemento –típicamente el centro geométrico o el centro de masas–, y la orientación del mismo. En el caso plano la orientación quedará definida con un ángulo, y en el espacial requerirá el empleo de alguno de los múltiples sistemas existentes para definir la orientación de un triedro en el espacio: ángulos de Euler, ángulos de Bryant, matriz de rotación, parámetros de Euler, etc.

Las ecuaciones de restricción surgen ahora de imponer las uniones –pares cinemáticos– entre los elementos, ya que inicialmente se han definido como si estuvieran libres, sin ataduras. Como ejemplo, en la figura 4 se modeliza en coordenadas de punto de referencia el mismo mecanismo modelizado antes en coordenadas relativas.

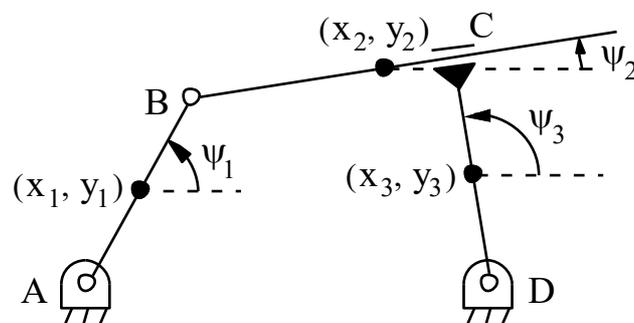


Figura 4. Coordenadas de punto de referencia.

En este caso, $n=9$ y $g=1$, luego $r=n-g=9-1=8$ son las ecuaciones de restricción que hay que imponer. Dado que los cuatro pares cinemáticos del mecanismo son de clase I, esto es, cada par restringe dos grados de libertad, habrá dos ecuaciones de restricción por par cinemático. Empezando por el par consignado con A y siguiendo el orden hasta D, las ecuaciones de restricción se muestran a continuación.

$$(x_1 - x_A) - \frac{L_1}{2} \cos \psi_1 = 0 \quad (5)$$

$$(y_1 - y_A) - \frac{L_1}{2} \operatorname{sen} \psi_1 = 0 \quad (6)$$

$$(x_1 + \frac{L_1}{2} \cos \psi_1) - (x_2 - \frac{L_2}{2} \cos \psi_2) = 0 \quad (7)$$

$$(y_1 + \frac{L_1}{2} \operatorname{sen} \psi_1) - (y_2 - \frac{L_2}{2} \operatorname{sen} \psi_2) = 0 \quad (8)$$

$$\psi_3 - (\psi_2 + \frac{\pi}{2}) = 0 \quad (9)$$

$$(x_2 - x_3) \cos \psi_3 + (y_2 - y_3) \operatorname{sen} \psi_3 - \frac{L_3}{2} = 0 \quad (10)$$

$$(x_3 - x_D) - \frac{L_3}{2} \cos \psi_3 = 0 \quad (11)$$

$$(y_3 - y_D) - \frac{L_3}{2} \operatorname{sen} \psi_3 = 0 \quad (12)$$

Quizá la ecuación (10) necesita una explicación. Se trata de una de las ecuaciones de restricción debida al par prismático en C. Esta ecuación asegura que el centro de la barra 3 se encuentre siempre a una distancia constante de la barra 2. Para conseguirlo se establece que la proyección del vector $(r_2 - r_3)$ sobre la barra 3 sea constante.

Las ventajas de estas coordenadas se encuentran en lo sistemático de su definición y del establecimiento de las ecuaciones de restricción, lo que hace que el proceso sea fácilmente automatizable, y en la posibilidad que ofrecen de situar un elemento directamente, esto es, sin necesidad de conocer la posición de los demás.

Como principal inconveniente está su elevado número (en el ejemplo 9 coordenadas de punto de referencia frente a 3 coordenadas relativas) que conduce a problemas de mayor tamaño, y la complejidad de las ecuaciones de restricción que ligan las variables (nótese la abundante presencia de funciones trigonométricas), especialmente en el caso tridimensional, en el que la interpretación de la orientación suele ser difícil.

2.3 Coordenadas naturales.

Las coordenadas naturales sitúan también cada elemento con independencia de los demás. Pueden verse como una evolución de las coordenadas de punto de referencia (figura 5).

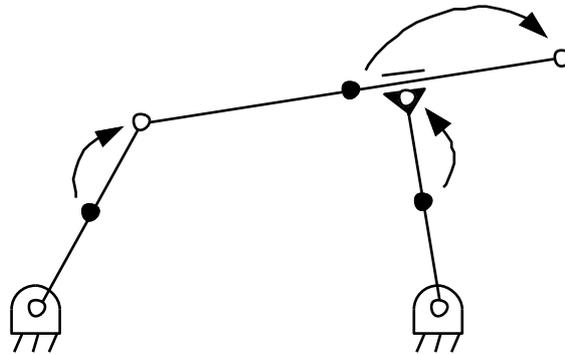


Figura 5. Evolución de las coordenadas de punto de referencia.

Los puntos de referencia emigran a los pares, contribuyendo así simultáneamente a la definición de los dos elementos que se unen en el par correspondiente. Una consecuencia inmediata es que ya no son necesarias variables de tipo angular para definir la orientación de cada elemento, cuestión que, según se veía en el apartado anterior, era ciertamente engorrosa, sobre todo en el caso tridimensional.

Para continuar con la comparación de los distintos tipos de coordenadas, se muestra en la figura 6 el mismo mecanismo que ya ha sido utilizado como ejemplo en los dos apartados anteriores, modelizado esta vez en coordenadas naturales.

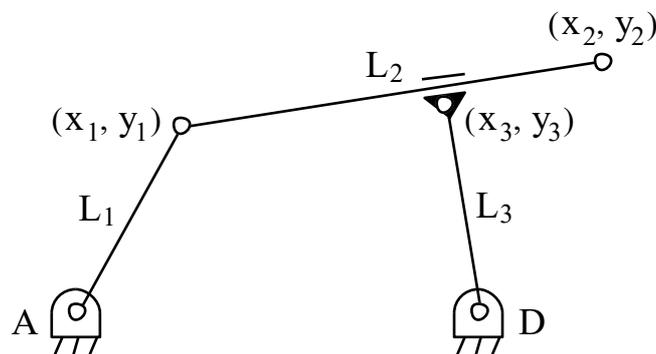


Figura 6. Coordenadas naturales.

En este caso se han empleado seis variables para la definición del mecanismo. Por tanto, $n=6$, $g=1$, luego $r=n-g-1=5$, son las ecuaciones de restricción que se precisan.

Cuando se modeliza en coordenadas naturales, las ecuaciones de restricción que ligan las variables proceden de dos fuentes: condiciones de sólido rígido y condiciones de par cinemático (en ciertos pares).

En el ejemplo de la figura 6 las restricciones son las siguientes:

$$(x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2 - L_1^2 = 0 \quad (13)$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_2^2 = 0 \quad (14)$$

$$(x_3 - x_D)^2 + (y_3 - y_D)^2 - L_3^2 = 0 \quad (15)$$

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_D) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_D) = 0 \quad (16)$$

$$(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1) = 0 \quad (17)$$

Las tres primeras ecuaciones de restricción son condiciones de distancia constante entre puntos, que aseguran el carácter rígido de las tres barras del mecanismo. Las dos últimas se deben al par prismático: la ecuación (16) impone que las barras 2 y 3 han de mantenerse siempre perpendiculares, y la (17) se encarga de que el punto 3 se halle en todo momento sobre la barra 2, esto es, alineado con los puntos 1 y 2.

Las ventajas de estas coordenadas son: definición simple y sistemática; ecuaciones de restricción fáciles de establecer y sencillas (no aparecen funciones trigonométricas); sitúan a cada elemento con independencia de los demás; número reducido, generalmente intermedio entre las relativas y las de punto de referencia (en el ejemplo, tres relativas, nueve de punto de referencia y seis naturales); inmediata interpretación geométrica de los resultados, más sencilla que en las otras coordenadas.

Como inconveniente está el hecho de que la utilización de estas coordenadas exige familiarizarse con ellas, para lograr modelizaciones correctas de los mecanismos.

Dado que las coordenadas naturales demuestran ser las más ventajosas, se dedican las próximas secciones a la descripción detallada de las mismas, primero en el caso plano y luego en el tridimensional.

3. Coordenadas naturales: caso plano.

En el plano, las coordenadas naturales son coordenadas cartesianas de puntos de sólidos del mecanismo, que se denominarán puntos básicos. Existen ciertas

normas que deben respetarse a la hora de modelizar un mecanismo plano en coordenadas naturales. Estas normas son:

- Cada sólido rígido debe contener, al menos, dos puntos básicos, ya que en caso contrario no queda su posición definida.
- En cada par de revolución o articulación debe situarse un punto básico. De esta forma, los dos sólidos que se unen en el par comparten un punto, quedando así automáticamente impuesta la condición de par de revolución.
- En pares prismáticos deben existir dos puntos básicos alineados con el eje del par que sirvan para definirlo.
- Pueden utilizarse más puntos básicos por conveniencia: definición de ángulos o distancias, puntos concretos de interés, etc.

A continuación se muestra un ejemplo de aplicación de estas reglas.

Modelizar en coordenadas naturales el mecanismo biela-manivela de la figura 7 y establecer las ecuaciones de restricción oportunas. Introducir también como variable el ángulo que forma la manivela con la horizontal.

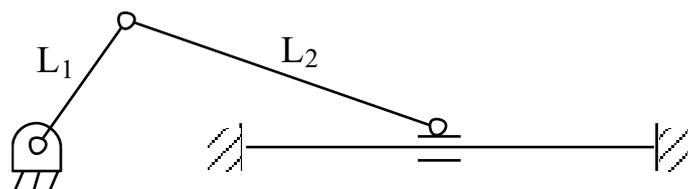


Figura 7. Mecanismo biela-manivela.

La modelización en coordenadas naturales de este mecanismo se muestra en la figura 8.

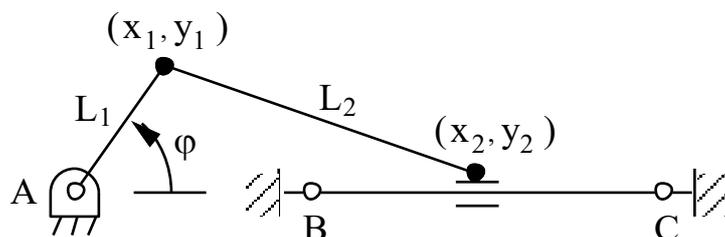


Figura 8. Modelización del biela-manivela en coordenadas naturales.

Los puntos básicos, que son coordenadas, variables del problema, han sido marcados en negro, mientras que los marcados en blanco representan puntos fijos, necesarios también muchas veces para una correcta modelización.

Por tanto, en este mecanismo se han utilizado cinco variables para su definición: las coordenadas x e y del punto 1, las coordenadas x e y del punto 2,

y el ángulo φ que se exigía en el enunciado. Dado que el mecanismo sólo posee un grado de libertad, será preciso establecer cuatro ecuaciones de restricción.

Tal como ya se ha dicho, las ecuaciones de restricción proceden de dos orígenes: carácter rígido de los sólidos y condiciones de par cinemático en algunos pares.

$$\text{Carácter rígido de la manivela: } (x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2 - L_1^2 = 0 \quad (18)$$

$$\text{Carácter rígido de la biela: } (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_2^2 = 0 \quad (19)$$

$$\text{Par deslizador: } (x_2 - x_C)(y_C - y_B) - (y_2 - y_C)(x_C - x_B) = 0 \quad (20)$$

$$\text{Ángulo: } (x_1 - x_A) - L_1 \cos\varphi = 0 \quad (21)$$

Las ecuaciones (18) y (19) son dos ecuaciones de distancia constante. La primera asegura que la distancia entre los puntos A y 1 se mantenga constante, e igual a la longitud de la barra rígida que existe entre ambos puntos. Lo mismo hace la segunda entre los puntos 1 y 2.

La ecuación (20) corresponde al par deslizador. Este es un par de clase II, esto es, permite dos grados de libertad entre los elementos que une, y restringe por tanto solamente uno. Hace falta pues introducir una ecuación de restricción que obligue a que el punto 2 se encuentre siempre sobre la línea definida por los puntos fijos B y C. Esta condición se expresa matemáticamente mediante un producto vectorial nulo entre los vectores $\vec{B2}$ y \vec{BC} . De las tres ecuaciones del producto vectorial sólo sirve una: la componente z.

La ecuación (21) es un producto escalar entre el vector $\vec{A1}$ y el vector (1,0). Sirve para relacionar el ángulo φ con el resto de variables, introduciéndolo así en la formulación matemática. Como se verá más adelante, no siempre será adecuado involucrar al ángulo mediante una ecuación de producto escalar.

La modelización de un mecanismo en coordenadas naturales no es algo rígido, en el sentido de que diversas modelizaciones pueden ser correctas. Por ejemplo, en el mecanismo biela-manivela que se acaba de ver, podría haberse prescindido de la variable y_2 , considerándola una constante, pues realmente su valor será constante durante el movimiento. En consecuencia, la ecuación (20) también hubiera sido innecesaria y el tamaño del problema (número de variables) se habría reducido de 5 a 4.

A continuación se describen sistemáticamente las distintas ecuaciones de restricción que han de introducirse para asegurar el carácter rígido de los sólidos e imponer las condiciones de par cinemático que se presenten.

3.1 Restricciones de sólido rígido.

El criterio general para conocer cuántas ecuaciones de restricción deben imponerse para asegurar que un sólido se comporte como rígido en el caso plano es el siguiente. Un sólido libre en el plano tiene tres grados de libertad. Por tanto, si se ha modelizado con n_i variables, el número de ecuaciones de restricción que habrá que introducir será,

$$r_i = n_i - 3 \quad (22)$$

Veamos su aplicación a los distintos casos que pueden darse.

3.1.1 Sólido modelizado con dos puntos básicos.

En este caso, $n_i=4$, pues las variables son las coordenadas cartesianas x e y de los puntos 1 y 2. Entonces, según la ecuación (22), será preciso imponer una única restricción.

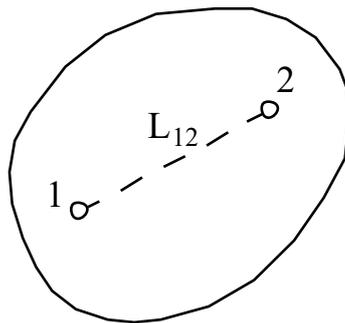


Figura 9. Sólido modelizado con dos puntos básicos.

Si L_{12} es la distancia que separa a los puntos 1 y 2, la ecuación de restricción será una condición de distancia constante entre ambos puntos,

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_{12}^2 = 0 \quad (23)$$

3.1.2 Sólido modelizado con tres puntos básicos.

Dado que hay seis variables, se precisan tres ecuaciones de restricción.

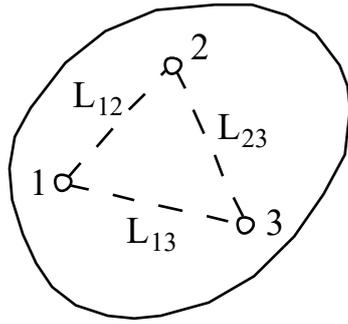


Figura 10. Sólido modelizado con tres puntos básicos.

Las tres restricciones corresponden a tres condiciones de distancia constante entre los puntos tomados dos a dos.

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_{12}^2 = 0 \quad (24)$$

$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 - L_{13}^2 = 0 \quad (25)$$

$$(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 - L_{23}^2 = 0 \quad (26)$$

En el caso particular de que los tres puntos se encuentren alineados las tres ecuaciones indicadas no son independientes.

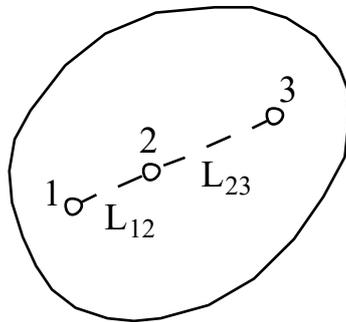


Figura 11. Sólido con tres puntos básicos alineados.

Entonces, las ecuaciones a introducir son,

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_{12}^2 = 0 \quad (27)$$

$$(x_3 - x_1) - \frac{L_{13}}{L_{12}}(x_2 - x_1) = 0 \quad (28)$$

$$(y_3 - y_1) - \frac{L_{13}}{L_{12}}(y_2 - y_1) = 0 \quad (29)$$

donde las ecuaciones (28) y (29) expresan que el vector $\vec{13}$ es proporcional al $\vec{12}$, siendo la constante de proporcionalidad la relación entre longitudes.

3.1.3 Sólido modelizado con cuatro puntos básicos.

En este caso el número de variables utilizado para definir el sólido es ocho. Aplicando la relación (22) será necesario establecer cinco ecuaciones de restricción.

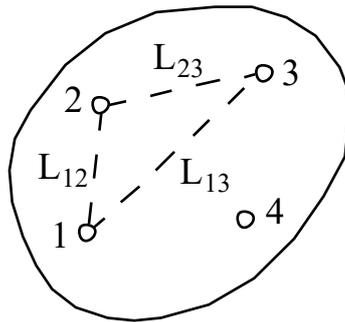


Figura 12. Sólido modelizado con cuatro puntos básicos.

La técnica que se va a emplear para determinar las restricciones a introducir en este caso, es generalizable a sólidos definidos con más de cuatro puntos básicos. La idea consiste en elegir tres puntos básicos no alineados, entre los que se establecen las condiciones de sólido rígido como se ha visto en el apartado anterior. Se dispone así de una base rígida en el elemento. El resto de puntos básicos se expresarán como combinación lineal de los vectores que definen esa base. Vamos a verlo en el caso expuesto en la figura 12. Las ecuaciones de restricción son:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_{12}^2 = 0 \quad (30)$$

$$(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 - L_{23}^2 = 0 \quad (31)$$

$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 - L_{13}^2 = 0 \quad (32)$$

$$(x_4 - x_2) - \lambda(x_1 - x_2) - \mu(x_3 - x_2) = 0 \quad (33)$$

$$(y_4 - y_2) - \lambda(y_1 - y_2) - \mu(y_3 - y_2) = 0 \quad (34)$$

Las ecuaciones (30) a (32) aseguran el comportamiento rígido del triángulo formado por los puntos 1, 2 y 3. Entonces, se considera un sistema de referencia en el sólido constituido por el punto 2, que hace de origen, y los vectores $\vec{21}$ y $\vec{23}$, que son la base. Las ecuaciones (33) y (34) indican que el vector $\vec{24}$ puede

expresarse como combinación lineal de los vectores de la base, siendo λ y μ los coeficientes que, al ser el sólido rígido, se mantendrán siempre constantes.

Así pues, si un sólido rígido en el plano está definido con más puntos básicos, todos aquéllos que excedan del cuarto tendrán el mismo tratamiento visto aquí para el punto 4. Por cada nuevo punto será preciso introducir dos ecuaciones de restricción adicionales: las ecuaciones en x e y de combinación lineal.

3.2 Restricciones de par cinemático.

También aquí hay un criterio para conocer el número de ecuaciones de restricción que deben establecerse para que un par quede correctamente modelizado. Un par cinemático en el plano puede ser de clase I o de clase II. Es decir, puede permitir un único movimiento relativo entre los elementos que une, restringiendo dos, o bien permitir dos movimientos relativos, restringiendo sólo uno. Lógicamente, un par de clase III permitiría tres movimientos relativos entre los elementos que en él se unieran, pero esto equivale a decir que los dos elementos no están unidos, están libres, pueden moverse por el plano con independencia. Por lo tanto, propiamente, en el plano sólo hay pares de clases I y II.

Pues bien, el criterio es el siguiente: un par obliga a establecer tantas ecuaciones de restricción entre variables como grados de libertad restringe en el movimiento relativo de los sólidos que en él se unen. Es decir, un par de clase I implica dos restricciones y uno de clase II implica una.

Aplicemos este criterio a los distintos tipos de pares que pueden presentarse en el plano.

3.2.1 Articulación.

Se trata de un par de clase I. Por lo tanto, han de introducirse dos ecuaciones de restricción, que obliguen a que exista un punto común entre los dos elementos que se unen en la articulación. Sin embargo, si se emplea el mismo punto básico –las mismas variables– para definir ese punto de articulación como perteneciente a ambos sólidos, es decir, si se comparte un punto básico en la definición de los dos elementos vecinos, implícitamente se está obligando a que los dos elementos viajen con ese punto en común.

Así que no es necesario establecer ecuación de restricción alguna. Compartir un punto básico, será pues equivalente a dos ecuaciones de restricción (se comparten dos variables, la x y la y). Por supuesto, se podrían definir puntos

básicos distintos en cada sólido, y entonces sí habría que imponer la igualdad de ambas coordenadas de esos puntos.

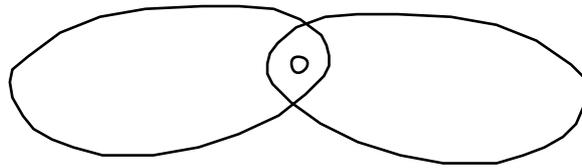


Figura 13. Articulación plana.

Lo dicho explica que, al enunciar anteriormente las reglas de modelización en coordenadas naturales, se recomienda definir un punto básico en las articulaciones, evitando así la necesidad de establecer ecuaciones de restricción y contribuyendo a que el tamaño del problema sea menor.

3.2.2 Par prismático.

De nuevo estamos ante un par de clase I. Es preciso introducir, por tanto, dos restricciones que impidan los dos movimientos relativos que restringe el par. Para que ello sea posible, la modelización del par en coordenadas naturales ha de cumplir ciertas condiciones. Pero veamos cómo se hace y luego trataremos de explicarlo.

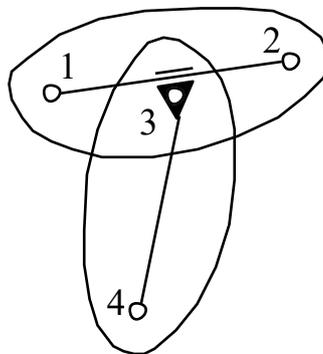


Figura 14. Par prismático en el plano.

Las ecuaciones de restricción entre las variables son las siguientes:

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) = 0 \quad (35)$$

$$(x_2 - x_1)(x_4 - x_3) + (y_2 - y_1)(y_4 - y_3) - c = 0 \quad (36)$$

La ecuación (35) es una ecuación de producto vectorial nulo entre los vectores $\vec{12}$ y $\vec{13}$. Asegura, por tanto que el punto 3 se encontrará siempre alineado con

los puntos 1 y 2. Como ya se indicó anteriormente, de las tres ecuaciones del producto vectorial, sólo la tercera, la ecuación en z , tiene sentido en el caso plano. La ecuación (36) es una ecuación de producto escalar constante. Tiene como fin impedir que se produzca un giro relativo entre los dos elementos. El valor de la constante c depende del ángulo que forme el vector $\vec{12}$ con el $\vec{34}$.

El par prismático puede ser un ejemplo de cómo, al modelizar un par cinemático en coordenadas naturales, hemos de estar pensando en que esas coordenadas con que modelizamos nos puedan servir para imponer las restricciones al movimiento relativo entre elementos que introduce el par. Por tanto, no se trata de elegir unos puntos básicos para definir el mecanismo y luego ver si con ellos podemos asegurar todas las ligaduras existentes, sino más bien al revés, elegir los puntos básicos de tal forma que las ligaduras puedan imponerse.

3.2.3 Par prismático especial.

Al decir par prismático especial nos referimos al par que contiene una deslizadera y una articulación plana integradas. Este tipo de par se muestra en la figura 15, junto con su modelización en coordenadas naturales.

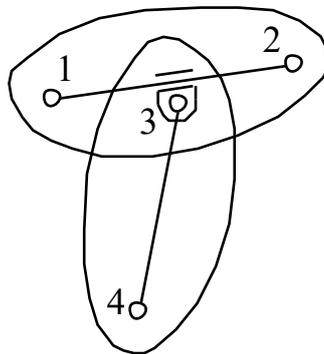


Figura 15. Par prismático especial plano.

Dado que se trata de un par de clase II, sólo debe ser preciso introducir una ecuación de restricción. Dicha ecuación será la que obligue al punto 3 a estar alineado con los puntos 1 y 2.

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) = 0 \quad (37)$$

Lógicamente, es la misma ecuación que en el caso del par prismático. De hecho, la diferencia entre ambos pares está en que el par prismático especial permite el giro relativo entre los dos elementos, cosa que no hacía el par prismático. Por

eso, en este nuevo par no se introduce la segunda ecuación, (36), que restringía el giro relativo.

Los demás pares que pueden darse en el caso plano, se irán viendo más adelante a través de ejemplos. Sin embargo, los hasta ahora vistos son los más importantes, no sólo por ser muy comunes, sino también porque sirven de base a los demás. De todas formas, lo fundamental será comprender la filosofía de modelización más que desarrollar toda la casuística posible. De esta manera, el lector estará en condiciones de modelizar cualquier mecanismo que se le presente.

3.3 Coordenadas mixtas.

Diremos que una modelización se ha llevado a cabo en coordenadas mixtas si además de coordenadas naturales se han utilizado algunas coordenadas relativas –ángulos y distancias–. El empleo de coordenadas relativas junto con las coordenadas naturales resulta de gran interés en muchos casos. Por ejemplo, son de enorme utilidad a la hora de definir pares como el par de engranaje, dado que este par impone una cierta proporcionalidad en los valores de los giros, o si se desean considerar hilos inextensibles, que implican una ecuación de suma de distancias. En otros casos, el mero hecho de disponer del valor de un cierto ángulo o distancia directamente como resultado del análisis, sin necesidad de postproceso, ya justifica la utilización de coordenadas mixtas. Existen además otras motivaciones que se verán en su momento.

Por cada nueva variable que se añade al problema, es necesario introducir una nueva ecuación de restricción que relacione a esa variable con las demás. De algún modo, esa ecuación nos dice quién es realmente esa variable en el mecanismo, qué es lo que realmente mide o representa. Es algo así como la carta de presentación de la variable ante las otras variables del mecanismo. Veamos cómo son esas ecuaciones, dependiendo de que tratemos de añadir al problema una variable de ángulo o de distancia.

3.3.1 Ecuación de ángulo.

Supongamos que se quiere definir un ángulo entre dos elementos unidos mediante una articulación plana. La modelización de esta situación se muestra en la figura 16.

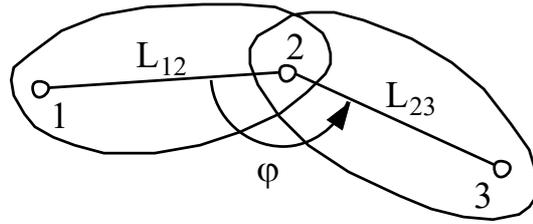


Figura 16. Ángulo entre dos elementos articulados.

La ecuación de restricción que ligue al ángulo con las coordenadas de los tres puntos básicos definidos, puede ser una ecuación de producto escalar (también llamada ecuación en coseno),

$$(x_1 - x_2)(x_3 - x_2) + (y_1 - y_2)(y_3 - y_2) - L_{12}L_{23} \cos\varphi = 0 \quad (38)$$

o bien una ecuación de producto vectorial (llamada asimismo ecuación en seno),

$$(x_1 - x_2)(y_3 - y_2) - (y_1 - y_2)(x_3 - x_2) - L_{12}L_{23} \sin\varphi = 0 \quad (39)$$

Como ya se ha mencionado en otras ocasiones, en el caso plano sólo una de las tres ecuaciones del producto vectorial tiene sentido, que es la ecuación en z .

No es, sin embargo indiferente el uso de una u otra ecuación. En efecto, cuando el valor del ángulo se aproxima a cero, la ecuación en coseno se hace no válida, y lo mismo ocurre con la ecuación en seno cuando el ángulo se aproxima a 90 grados.

Tratemos de explicar por qué ocurre esto, por ejemplo, en el caso de la ecuación en coseno, cuando el ángulo toma un valor de cero grados. Si se produce una pequeña variación del ángulo, que denominaremos $\delta\varphi$, es de esperar que esa variación induzca otras pequeñas variaciones en las coordenadas de los puntos básicos (ver figura 16). Se diferencia, por tanto la ecuación (38), para ver cuáles son esas variaciones inducidas. Para mayor sencillez, y sin pérdida de generalidad, se asume que los puntos 2 y 3 de la figura 16 sean fijos (es decir, que el elemento de la derecha sea fijo). Entonces,

$$(\delta x_1 - x_2)(x_3 - x_2) + (\delta y_1 - y_2)(y_3 - y_2) + L_{12}L_{23}\delta\varphi \sin\varphi = 0 \quad (40)$$

Esta ecuación revela claramente que una variación $\delta\varphi$ no es capaz de producir variaciones en las otras variables, pues el seno será cero si el ángulo lo es y, por tanto, el tercer sumando será nulo independientemente del valor del incremento del ángulo. Si el valor del ángulo no es cero pero se halla muy próximo, el

tercer sumando será también casi nulo y, en consecuencia, la ecuación seguirá siendo inaceptable. Podría decirse que para que la ecuación sea válida debe poseer una sensibilidad suficiente al cambio. Algo análogo ocurre con la ecuación en seno si el ángulo es recto.

Una buena política puede ser entonces utilizar la ecuación en seno o la ecuación en coseno dependiendo del valor del ángulo, según el criterio que se muestra en la figura 17.

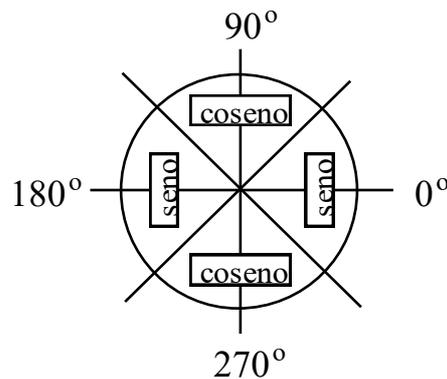


Figura 17. Elección de la ecuación de ángulo.

Sin embargo, también caben otras opciones. Por ejemplo, pueden incluirse ambas ecuaciones siempre, que serán dependientes, pero se asegura así que en todo momento hay alguna válida. Esto es lo que se llama introducir ecuaciones redundantes. Sobre este tema se hablará más adelante. Otra posibilidad es introducir una única ecuación de restricción que sea suma o diferencia de las dos anteriores, pero este procedimiento no siempre da buen resultado.

3.3.2 Ecuación de distancia.

Sea un par prismático entre dos elementos como el que se ve en la figura 18.

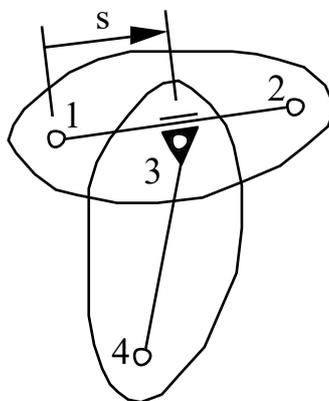


Figura 18. Distancia entre dos puntos.

Si se desea definir como variable la distancia entre los puntos básicos 1 y 3, es preciso añadir una nueva ecuación de restricción. En este caso, puede establecerse la condición de que el vector $\vec{13}$ es proporcional al vector $\vec{12}$, dependiendo el factor de proporcionalidad de la distancia s . Es ésta una condición vectorial que da lugar a dos ecuaciones escalares.

$$(x_3 - x_1) - \frac{s}{L_{12}}(x_2 - x_1) = 0 \quad (41)$$

$$(y_3 - y_1) - \frac{s}{L_{12}}(y_2 - y_1) = 0 \quad (42)$$

Como ocurría al hablar de los ángulos, también aquí es preferible una u otra ecuación dependiendo de la posición. Así, si el segmento $\overline{12}$ se encuentra horizontal (o próximo) debe elegirse la ecuación en x , mientras que si dicho segmento se halla vertical (o próximo) hay que tomar la ecuación en y .

Entonces, al igual que para la ecuación de ángulo, caben varias opciones. La primera es introducir una u otra ecuación dependiendo de la posición del segmento $\overline{12}$, cambiando de ecuación cuando el segmento pase por una inclinación de 45 grados. La segunda posibilidad es introducir siempre ambas ecuaciones, yendo a un sistema de ecuaciones redundantes. La tercera es considerar la ecuación de restricción suma o diferencia de ambas.

Existe también la opción de utilizar la siguiente ecuación,

$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 - s^2 = 0 \quad (42b)$$

si bien esta expresión puede dar problemas en aquellos casos en los que el signo de la distancia sea relevante (la ecuación se verifica igualmente para un valor de s positivo o negativo).

3.4 Ejemplos.

En este apartado se muestra la modelización en coordenadas naturales de varios mecanismos planos y se plantean las ecuaciones de restricción correspondientes. Se trata de aplicar todo lo visto anteriormente a un nivel un tanto teórico, facilitando su comprensión.

Como regla general, se puede indicar la siguiente forma de proceder a la hora de modelizar un mecanismo: en primer lugar, situar tantos puntos básicos como sea necesario para que los pares cinemáticos del mecanismo queden perfectamente

definidos. Una vez recorridos todos los pares, asegurarse de que todos los elementos han quedado bien definidos (al menos dos puntos básicos en cada uno) con los puntos básicos elegidos. De no ser así, situar más puntos básicos hasta lograr la perfecta definición de todos los sólidos.

Ejemplo 1: par de engranajes.

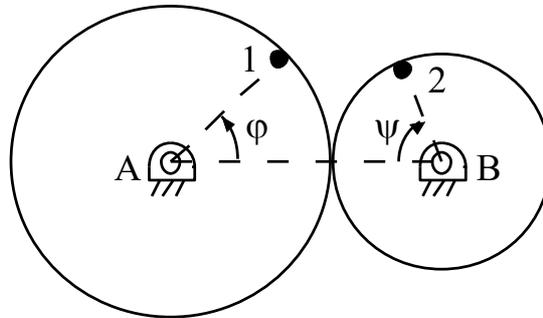


Figura 19. Par de engranajes.

Como ya se hizo en un ejemplo anterior, se marcan en negro los puntos básicos (variables del problema) y en blanco los puntos fijos. Este criterio se adoptará en adelante para todos los ejemplos.

En este caso se han definido dos puntos fijos para imponer las articulaciones de las ruedas al elemento fijo. Por otro lado, es conveniente definir dos ángulos para facilitar la consideración del par de engranaje, que consiste en una relación de proporcionalidad entre ambos ángulos. Los puntos básicos en la periferia de las ruedas tienen una doble misión: permiten definir perfectamente la posición de cada rueda a la vez que sirven para la definición de los ángulos.

El problema así modelizado tiene seis variables (coordenadas x e y de los puntos 1 y 2, más los ángulos φ y ψ). Dado que sólo hay un grado de libertad, será preciso establecer cinco ecuaciones de restricción.

$$(x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2 - R_1^2 = 0 \quad (43)$$

$$(x_2 - x_B)^2 + (y_2 - y_B)^2 - R_2^2 = 0 \quad (44)$$

$$(x_1 - x_A)(x_B - x_A) + (y_1 - y_A)(y_B - y_A) - R_1(R_1 + R_2)\cos\varphi = 0 \quad (45)$$

$$(x_2 - x_B)(x_A - x_B) + (y_2 - y_B)(y_A - y_B) - R_2(R_1 + R_2)\cos\psi = 0 \quad (46)$$

$$R_1\varphi - R_2\psi - c = 0 \quad (47)$$

Las dos primeras ecuaciones son ecuaciones de distancia constante entre los puntos A, 1 y B, 2 respectivamente. Las ecuaciones (45) y (46) son ecuaciones de producto escalar (en coseno) y definen los ángulos φ y ψ . Como ya se ha dicho, estas dos ecuaciones no son válidas en todo momento. Finalmente, la

ecuación (47) impone la condición del par de engranaje, esto es, la proporcionalidad entre los ángulos girados por las ruedas. La constante c será cero si ambos ángulos toman valor nulo al mismo tiempo.

Ejemplo 2: mecanismo de colisa.

Este es un mecanismo de retorno rápido que se utiliza, por ejemplo, en la limadora .

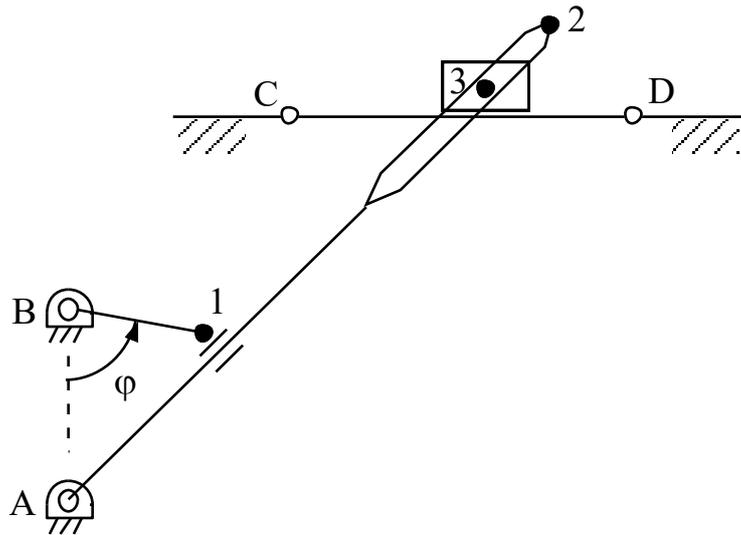


Figura 20. Mecanismo de colisa.

Como puede verse en la figura 20, el mecanismo se ha modelizado mediante tres puntos básicos, cuatro puntos fijos y un ángulo. En esta ocasión, la introducción del ángulo responde a la naturaleza del propio mecanismo: lo normal es que haya un motor rotativo en B que haga girar la manivela. Entonces, si se desea llevar a cabo un análisis cinemático, convendrá guiar el ángulo φ , mientras que si lo que se realiza es un análisis dinámico, actuará un par motor en B. En ambos casos, disponer del ángulo como variable del problema es de gran utilidad.

Por lo tanto, se han definido siete variables. Como el mecanismo tiene un único grado de libertad deben establecerse seis ecuaciones de restricción. Son las siguientes:

$$(x_1 - x_B)^2 + (y_1 - y_B)^2 - L_{B1}^2 = 0 \quad (48)$$

$$(x_2 - x_A)^2 + (y_2 - y_A)^2 - L_{A2}^2 = 0 \quad (49)$$

$$(x_1 - x_A)(y_2 - y_A) - (y_1 - y_A)(x_2 - x_A) = 0 \quad (50)$$

$$(x_3 - x_A)(y_2 - y_A) - (y_3 - y_A)(x_2 - x_A) = 0 \quad (51)$$

$$(x_3 - x_C)(y_D - y_C) - (y_3 - y_C)(x_D - x_C) = 0 \quad (52)$$

$$(x_1 - x_B)(x_A - x_B) + (y_1 - y_B)(y_A - y_B) - L_{B1}L_{BA} \cos\varphi = 0 \quad (53)$$

Las dos primeras ecuaciones aseguran el carácter rígido de manivela y colisa. La tercera impone que el punto 1 se encuentre siempre alineado con A y 2, es decir, se debe al par prismático especial que conecta la manivela con la colisa. La cuarta impone lo mismo para el punto 3 de la corredera, definiendo el par prismático especial que la une a la colisa. La quinta ecuación se ocupa de que la corredera vaya por su guía. La última es una ecuación de producto escalar que sirve para introducir el ángulo. Como ya se sabe, no será válida durante todo el movimiento, debiendo ser sustituida periódicamente por la ecuación en seno correspondiente.

Indicar que, con la modelización propuesta, la corredera queda sólo definida por un punto básico. Esto va contra la norma de que todos los sólidos deben poseer al menos dos puntos básicos (alguno de ellos puede ser un punto fijo) para su correcta definición. Sin embargo, en el caso de la corredera no hay duda sobre la orientación del sólido, siendo suficiente con conocer las coordenadas de un punto para situarlo. De esta forma, se ahorran variables y, en consecuencia, se mantiene un tamaño de problema más reducido.

Comentar también que, caso de que los ejes generales fueran horizontal y vertical (como es de suponer), se podría haber ahorrado otra variable y la consiguiente ecuación de restricción. En efecto, la coordenada y del punto 3 se mantiene siempre constante, por lo que se puede eliminar como variable. Consecuentemente desaparecería la ecuación (52), pues ya estaría asegurado que el punto 3 se moviera en la línea definida por C y D.

Ejemplo 3: par de rodadura.

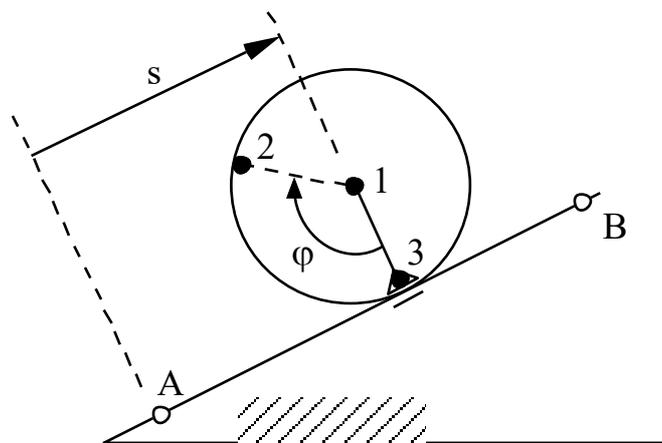


Figura 21. Par de rodadura.

Para modelizar el par de rodadura de la figura 21 resulta conveniente definir un par prismático ficticio. De esta forma, se asegura que el centro del disco se encuentre siempre a una distancia constante del suelo. Además, se precisa la definición de dos coordenadas relativas, el ángulo φ y la distancia s , de manera que sea posible establecer la condición de rodadura que liga ambas variables.

Se utilizan, por tanto, ocho variables (coordenadas x e y de los puntos 1, 2 y 3, más el ángulo φ y la distancia s) y dos puntos fijos, A y B, que permitan imponer las condiciones del par prismático. Dado que el mecanismo sólo posee un grado de libertad, habrá que imponer siete ecuaciones de restricción.

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - R^2 = 0 \quad (54)$$

$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 - R^2 = 0 \quad (55)$$

$$(x_3 - x_A)(y_B - y_A) - (y_3 - y_A)(x_B - x_A) = 0 \quad (56)$$

$$(x_1 - x_3)(x_B - x_A) + (y_1 - y_3)(y_B - y_A) = 0 \quad (57)$$

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1) - R^2 \cos\varphi = 0 \quad (58)$$

$$(x_3 - x_A) - \frac{s}{L_{AB}}(x_B - x_A) = 0 \quad (59)$$

$$s - R\varphi - c = 0 \quad (60)$$

Las dos primeras ecuaciones son de sólido rígido. La tercera y la cuarta aseguran el par prismático ficticio. Las ecuaciones (58) y (59) definen el ángulo y la distancia respectivamente. Como ya se ha indicado anteriormente, pueden ser o no las más adecuadas en cada instante. Finalmente, la ecuación (60) establece la relación de rodadura; la constante c es el valor de la distancia cuando el ángulo toma valor cero.

Ejemplo 4: mecanismo genérico.

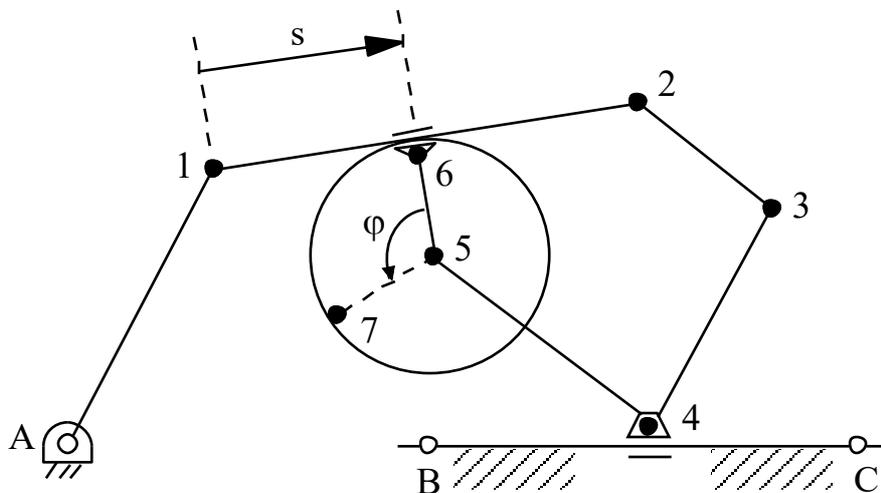


Figura 22. Mecanismo genérico.

En este caso, como en el ejemplo anterior, se recurre a definir un elemento y un par prismático ficticios para imponer el contacto entre disco y barra, y dos coordenadas relativas –ángulo y distancia– para introducir la condición de rodadura. La modelización se ha realizado con siete puntos básicos y dos coordenadas relativas, es decir, con dieciséis variables. Es fácil comprobar mediante el criterio de Gruebler que el mecanismo en cuestión posee un único grado de libertad. Se precisan, por tanto, quince ecuaciones de restricción.

$$(x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2 - L_{A1}^2 = 0 \quad (61)$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_{12}^2 = 0 \quad (62)$$

$$(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 - L_{23}^2 = 0 \quad (63)$$

$$(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 - L_{34}^2 = 0 \quad (64)$$

$$(x_5 - x_4)^2 + (y_5 - y_4)^2 - L_{45}^2 = 0 \quad (65)$$

$$(x_5 - x_3)^2 + (y_5 - y_3)^2 - L_{35}^2 = 0 \quad (66)$$

$$(x_6 - x_5)^2 + (y_6 - y_5)^2 - L_{56}^2 = 0 \quad (67)$$

$$(x_7 - x_5)^2 + (y_7 - y_5)^2 - L_{57}^2 = 0 \quad (68)$$

$$(x_4 - x_B)(y_C - y_B) - (y_4 - y_B)(x_C - x_B) = 0 \quad (69)$$

$$(x_3 - x_4)(x_C - x_B) + (y_3 - y_4)(y_C - y_B) - c_1 = 0 \quad (70)$$

$$(x_6 - x_1)(y_2 - y_1) - (y_6 - y_1)(x_2 - x_1) = 0 \quad (71)$$

$$(x_2 - x_1)(x_5 - x_6) + (y_2 - y_1)(y_5 - y_6) = 0 \quad (72)$$

$$(x_6 - x_5)(x_7 - x_5) + (y_6 - y_5)(y_7 - y_5) - R^2 \cos \varphi = 0 \quad (73)$$

$$(x_6 - x_1) - \frac{s}{L_{12}}(x_2 - x_1) = 0 \quad (74)$$

$$s - R\varphi - c_2 = 0 \quad (75)$$

Desde la ecuación (61) hasta la (68) son ecuaciones de distancia que aseguran el carácter rígido de los diferentes sólidos. Las ecuaciones (69) y (70) definen el par prismático real y las ecuaciones (71) y (72) el par prismático ficticio. Las ecuaciones (73) y (74) definen el ángulo y la distancia respectivamente y, para terminar, la ecuación (75) impone la condición de rodadura entre disco y barra.

4. Coordenadas naturales: caso tridimensional.

En el espacio, las coordenadas naturales son coordenadas cartesianas de puntos de los sólidos del mecanismo y componentes cartesianas de vectores unitarios rígidamente unidos a los sólidos del mecanismo.

Análogamente a como se hizo en el caso plano, se pueden citar varias normas generales de modelización para tomar contacto con estas coordenadas. Posteriormente, al ir profundizando, el lector se dará cuenta de que dispone de

una gran libertad en la modelización. Pero, dado que aún estamos comenzando, enumeremos dichas reglas orientativas:

- Cada sólido rígido del mecanismo ha de contener suficientes puntos y vectores unitarios para que su movimiento quede perfectamente definido: esto implica un mínimo de dos puntos y un vector unitario no alineados, o tres puntos no alineados, o un punto y dos vectores unitarios distintos en cada sólido. También puede definirse un sólido con sólo dos puntos, pero en este caso aceptamos que el sólido posea solamente cinco grados de libertad, ya que no se detecta la rotación del mismo alrededor del eje definido por los dos puntos. Puede ser conveniente en el caso de barras con rótulas en los extremos.
- En la modelización de los pares cinemáticos se tratará de compartir puntos y vectores unitarios.
- Convendrá compartir un punto en aquellos pares que realmente comparten algún punto material, como el par de revolución, el esférico o la junta universal.
- Convendrá compartir un vector unitario en aquellos pares que contengan un eje de rotación o traslación, como el par de revolución, el prismático o el cilíndrico.
- Un vector unitario puede ser sustituido por dos puntos.
- Pueden definirse puntos y vectores unitarios adicionales siempre que se estime oportuno.

Como ya se ha mencionado anteriormente, las ecuaciones de restricción que relacionan las variables proceden de asegurar el carácter rígido de los sólidos y de imponer algunos pares cinemáticos. También pueden definirse coordenadas relativas, debiéndose añadir una nueva ecuación de restricción por cada nueva coordenada.

Para que el lector pueda ver concretadas todas estas reglas, se presenta a continuación un ejemplo. Como ya se dijo al hablar del caso plano, la idea que debe presidir la modelización es la siguiente: situar, primeramente, tantos puntos y vectores unitarios (o incluso coordenadas relativas) como sea necesario para que los pares cinemáticos queden perfectamente definidos y, acto seguido, verificar que todos los sólidos del mecanismo queden bien modelizados, introduciendo variables adicionales en aquéllos que no lo estén. Pero vamos ya con el ejemplo.

Modelizar en coordenadas naturales el mecanismo RSCR de la figura 23 y establecer las ecuaciones de restricción oportunas.

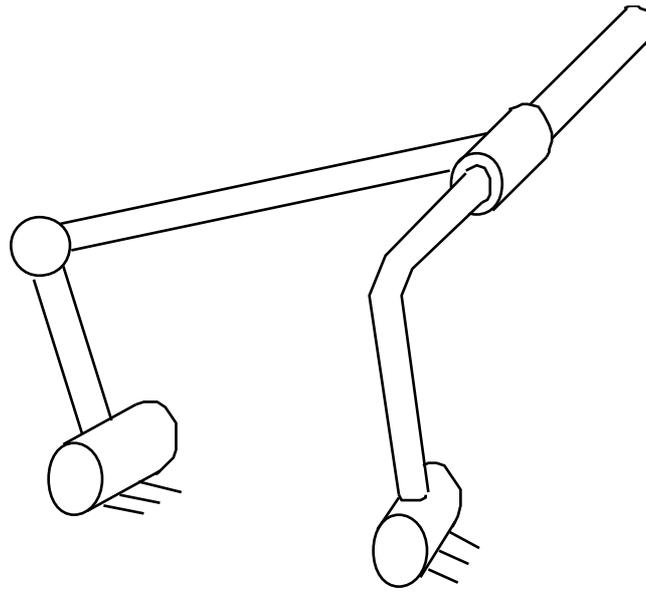


Figura 23. Mecanismo RSCR.

Respuesta: la modelización de esta mecanismo en coordenadas naturales se muestra en la figura 24.

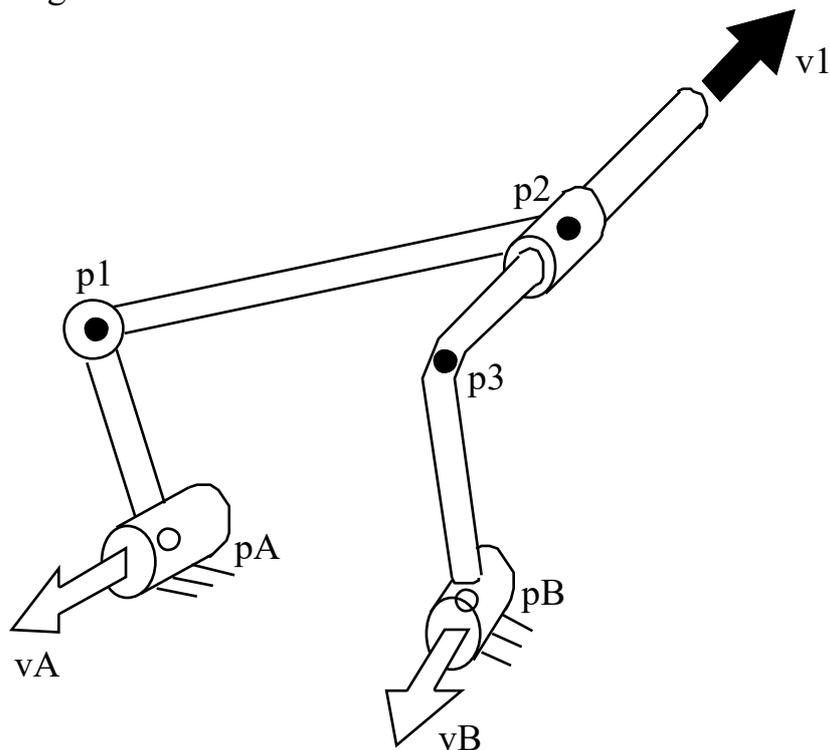


Figura 24. Modelización del mecanismo RSCR en coordenadas naturales.

El mecanismo RSCR recibe su nombre de los tipos de pares cinemáticos que posee: revolución, esférico, cilíndrico y revolución. Dado que en el caso tridimensional hay puntos y vectores unitarios, se distinguen los nombres de las variables utilizando una p o una v, según nos refiramos a un punto o a un vector

unitario. Se mantiene el criterio de utilizar el blanco para variables fijas y el negro para las móviles.

Se emplean, por tanto, tres puntos y un vector unitario móviles para la definición del mecanismo, lo que hace un total de doce variables. El mecanismo sólo tiene un grado de libertad, así que habrán de establecerse once ecuaciones de restricción. Se muestran clasificadas según la función que cumplen.

Carácter rígido del sólido RS.

$$(p1_x - pA_x)^2 + (p1_y - pA_y)^2 + (p1_z - pA_z)^2 - L_{RS}^2 = 0 \quad (76)$$

$$(p1_x - pA_x)vA_x + (p1_y - pA_y)vA_y + (p1_z - pA_z)vA_z - c_1 = 0 \quad (77)$$

Carácter rígido del sólido SC.

$$(p2_x - p1_x)^2 + (p2_y - p1_y)^2 + (p2_z - p1_z)^2 - L_{SC}^2 = 0 \quad (78)$$

$$(p2_x - p1_x)v1_x + (p2_y - p1_y)v1_y + (p2_z - p1_z)v1_z - c_2 = 0 \quad (79)$$

$$v1_x^2 + v1_y^2 + v1_z^2 - 1 = 0 \quad (80)$$

Par cilíndrico.

$$(p3_y - p2_y)v1_z - (p3_z - p2_z)v1_y = 0 \quad (81)$$

$$(p3_z - p2_z)v1_x - (p3_x - p2_x)v1_z = 0 \quad (82)$$

$$(p3_x - p2_x)v1_y - (p3_y - p2_y)v1_x = 0 \quad (83)$$

Carácter rígido del sólido CR.

$$(p3_x - pB_x)^2 + (p3_y - pB_y)^2 + (p3_z - pB_z)^2 - L_{RC}^2 = 0 \quad (84)$$

$$(p3_x - pB_x)v1_x + (p3_y - pB_y)v1_y + (p3_z - pB_z)v1_z - c_3 = 0 \quad (85)$$

$$(p3_x - pB_x)vB_x + (p3_y - pB_y)vB_y + (p3_z - pB_z)vB_z - c_4 = 0 \quad (86)$$

$$v1_x vB_x + v1_y vB_y + v1_z vB_z - c_5 = 0 \quad (87)$$

Puede verse que han sido doce en lugar de once las ecuaciones de restricción introducidas. Ello se debe a la condición de alineamiento del punto 2 con el punto 3 y el vector unitario 1, necesaria para la definición del par cilíndrico. Dicha condición de alineamiento se expresa matemáticamente como un producto vectorial, que da por tanto lugar a tres ecuaciones escalares: son las ecuaciones (81), (82) y (83). Sólo dos de estas tres ecuaciones son independientes, por lo que sólo deberíamos elegir dos. Las dos mejores serán las correspondientes a las dos menores componentes de un vector unitario en la dirección del eje del par. Lógicamente, a lo largo del movimiento, pueden ir variando las ecuaciones a elegir, pues la orientación del eje del par puede variar. Este es el motivo de haber escrito las tres, aunque, en cada instante, sólo dos sean independientes. Una posibilidad es introducir siempre las tres ecuaciones, obteniendo un sistema con ecuaciones redundantes.

Las ecuaciones (76) y (77) aseguran el carácter rígido del sólido que conecta los pares R y S. Se trata de una ecuación de distancia constante entre los puntos A y 1, y una ecuación de producto escalar constante entre el vector $\vec{pAp1}$ y el vector unitario A, que sirve para que el ángulo entre ambos vectores se mantenga siempre constante.

Las ecuaciones (78), (79) y (80) aseguran el carácter rígido del sólido que conecta los pares S y C. La primera es una ecuación de distancia constante entre los puntos 1 y 2, la segunda una ecuación de producto escalar constante entre el vector $\vec{p1p2}$ y el vector unitario 1, y la tercera una ecuación de módulo unidad del vector unitario 1.

Las ecuaciones (84) a (87) sirven para asegurar el carácter rígido del sólido que conecta los pares C y R. La primera es una ecuación de distancia constante entre los puntos B y 2. Las demás son ecuaciones de producto escalar constante entre el vector $\vec{pBp3}$ y el vector unitario 1, entre el vector $\vec{pBp3}$ y el vector unitario B, y entre los vectores unitarios B y 1.

Visto este ejemplo a modo introductorio, se describen a continuación sistemáticamente las distintas ecuaciones de restricción que han de establecerse para asegurar el carácter rígido de los sólidos de un mecanismo cualquiera, y definir los pares cinemáticos que se presenten. También se tratará de la consideración de coordenadas relativas.

4.1 Restricciones de sólido rígido.

Como criterio general, si se emplean n_i variables para definir un cierto sólido rígido en el espacio –que posee seis grados de libertad–, el número de ecuaciones de restricción que habrá que imponer es,

$$r_i = n_i - 6 \quad (88)$$

Veamos a continuación la casuística que se puede presentar en la definición de sólidos rígidos.

4.1.1 Sólido modelizado con dos puntos.

Este es un caso particular, ya que un sólido que en el espacio se defina con dos puntos tiene solamente cinco grados de libertad. En efecto, cualquier rotación del sólido alrededor de la recta definida por ambos puntos no será detectada. Esta modelización es aplicable por tanto a elementos tipo barra, con inercia

despreciable respecto a su propio eje, y que se encuentren unidos a los elementos vecinos mediante rótulas esféricas.

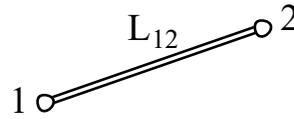


Figura 25. Sólido modelizado con dos puntos.

Dado que se utilizan seis variables para definir el sólido –las tres coordenadas cartesianas de cada punto–, y que sólo posee cinco grados de libertad, habrá que establecer una única ecuación de restricción, que será una condición de distancia constante entre los dos puntos,

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - L_{12}^2 = 0 \quad (89)$$

4.1.2 Sólido modelizado con dos puntos y un vector unitario.

En este caso se emplean nueve variables, luego aplicando la relación (88) se concluye que hay que imponer tres ecuaciones de restricción para asegurar el carácter de sólido rígido.

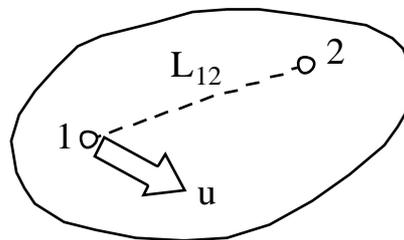


Figura 26. Sólido modelizado con dos puntos y un vector unitario.

Las tres ecuaciones son,

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - L_{12}^2 = 0 \quad (90)$$

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - 1 = 0 \quad (91)$$

$$(x_2 - x_1)u_x + (y_2 - y_1)u_y + (z_2 - z_1)u_z - c = 0 \quad (92)$$

La primera es una ecuación de distancia constante entre los dos puntos. La segunda es una condición de módulo unitario para el vector. La tercera es una condición de producto escalar constante que obliga a que se mantenga el ángulo que forman el vector $\vec{12}$ y el vector unitario.

En el caso particular de que el vector unitario se encuentre alineado con los dos puntos, las ecuaciones anteriores no son independientes.

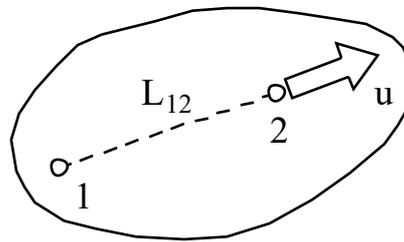


Figura 27. Sólido con dos puntos y un vector unitario alineados.

En su lugar se introducirán las siguientes:

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - 1 = 0 \quad (93)$$

$$(x_2 - x_1) - L_{12}u_x = 0 \quad (94)$$

$$(y_2 - y_1) - L_{12}u_y = 0 \quad (95)$$

$$(z_2 - z_1) - L_{12}u_z = 0 \quad (96)$$

La primera ecuación es de módulo unitario del vector. Las siguientes son las tres ecuaciones escalares a que da lugar la condición vectorial que expresa el vector $\vec{12}$ como proporcional al vector unitario u . De ellas sólo dos serán independientes, aquéllas correspondientes a las dos menores componentes del vector unitario. Como siempre, caben dos posibilidades: elegir en cada instante la ecuación que debe ser desechada, o introducir todas dando lugar a un sistema de ecuaciones redundantes.

4.1.3 Sólido modelizado con tres puntos.

En este caso, el número de variables empleadas para definir el sólido es nueve, luego habrá que establecer tres ecuaciones de restricción entre ellas.

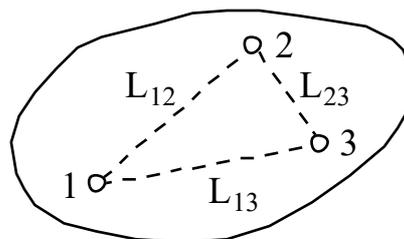


Figura 28. Sólido modelizado con tres puntos.

Lógicamente, al igual que ya ocurría en el caso plano, las tres ecuaciones serán tres condiciones de distancia constante entre los puntos.

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - L_{12}^2 = 0 \quad (97)$$

$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 - L_{13}^2 = 0 \quad (98)$$

$$(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 - L_{23}^2 = 0 \quad (99)$$

En el caso particular de que los tres puntos se encuentren alineados, se procederá como ya se hizo en el caso plano.

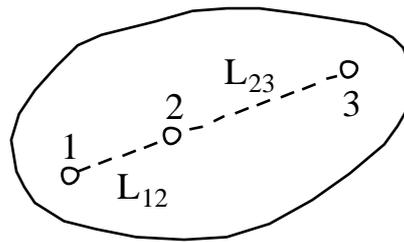


Figura 29. Sólido con tres puntos alineados.

Las ecuaciones a introducir son:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - L_{12}^2 = 0 \quad (100)$$

$$(x_3 - x_1) - \frac{L_{13}}{L_{12}}(x_2 - x_1) = 0 \quad (101)$$

$$(y_3 - y_1) - \frac{L_{13}}{L_{12}}(y_2 - y_1) = 0 \quad (102)$$

$$(z_3 - z_1) - \frac{L_{13}}{L_{12}}(z_2 - z_1) = 0 \quad (103)$$

Al igual que sucedía con el caso de un sólido con dos puntos y un vector unitario alineados, las ecuaciones (101) a (103) no son independientes. Sólo lo son dos de ellas, aquéllas correspondientes a las dos menores componentes de un vector en la dirección definida por los tres puntos. Como siempre en estos casos, puede desecharse la ecuación dependiente en cada instante o pueden introducirse todas dando lugar a un sistema redundante de ecuaciones.

4.1.4 Sólido modelizado con dos puntos y dos vectores unitarios.

Dado que se utilizan doce variables para la modelización del sólido, será preciso establecer seis ecuaciones de restricción que las relacionen.

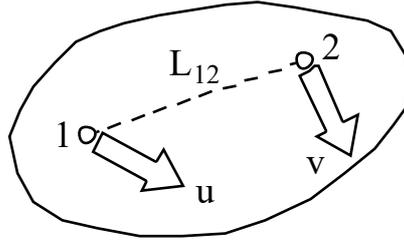


Figura 30. Sólido modelizado con dos puntos y dos vectores unitarios.

Las ecuaciones de restricción a introducir en este caso son:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - L_{12}^2 = 0 \quad (104)$$

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - 1 = 0 \quad (105)$$

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 - 1 = 0 \quad (106)$$

$$(x_2 - x_1)u_x + (y_2 - y_1)u_y + (z_2 - z_1)u_z - c_1 = 0 \quad (107)$$

$$(x_2 - x_1)v_x + (y_2 - y_1)v_y + (z_2 - z_1)v_z - c_2 = 0 \quad (108)$$

$$u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z - c_3 = 0 \quad (109)$$

La primera es una ecuación de distancia constante entre los dos puntos. La segunda y la tercera son condiciones de módulo unitario de los dos vectores. La cuarta es una ecuación de producto escalar constante, que mantiene fijo el ángulo entre el vector \mathbf{u} y el segmento formado por los dos puntos. La quinta es análoga pero con el vector \mathbf{v} . La sexta ecuación es también análoga, pero esta vez entre los dos vectores unitarios.

Un caso particular que puede presentar esta modelización es aquél en el cual el segmento formado por los dos puntos, el vector unitario \mathbf{u} y el vector unitario \mathbf{v} son coplanarios. Entonces, las ecuaciones vistas anteriormente se vuelven dependientes, debiendo modificarse. Las ecuaciones de restricción correctas son:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - L_{12}^2 = 0 \quad (110)$$

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - 1 = 0 \quad (111)$$

$$(x_2 - x_1)u_x + (y_2 - y_1)u_y + (z_2 - z_1)u_z - c_1 = 0 \quad (112)$$

$$v_x - \lambda(x_2 - x_1) - \mu u_x = 0 \quad (113)$$

$$v_y - \lambda(y_2 - y_1) - \mu u_y = 0 \quad (114)$$

$$v_z - \lambda(z_2 - z_1) - \mu u_z = 0 \quad (115)$$

Como puede verse, las tres primeras ecuaciones son las mismas. Sirven para asegurar que el vector formado por los dos puntos y el vector unitario \mathbf{u} forman una base rígida. Las tres últimas ecuaciones expresan el vector unitario \mathbf{v} como combinación lineal de los dos vectores de la base mencionada, siendo λ y μ los coeficientes de la combinación lineal. Por supuesto, se podría haber tomado la base formada por los dos vectores unitarios y haber escrito el vector $\vec{12}$ como combinación lineal de \mathbf{u} y \mathbf{v} , o haber tomado como base al vector formado por los dos puntos y el vector unitario \mathbf{v} , expresando como combinación lineal al vector unitario \mathbf{u} .

4.1.5 Sólido general.

Dado que la casuística puede ser interminable, se indica en este apartado el criterio general que permitirá establecer correctamente las ecuaciones de restricción para un sólido rígido modelizado con cualquier número de puntos y vectores unitarios.

La forma de proceder es la siguiente:

- Seleccionar tres segmentos que definan una base tridimensional.
- Establecer las seis ecuaciones de restricción entre los tres segmentos elegidos, asegurando así el carácter rígido de la base.
- Expresar el resto de puntos y vectores unitarios como combinación lineal de los segmentos de la base.

Veamos la aplicación de estas reglas en un ejemplo.

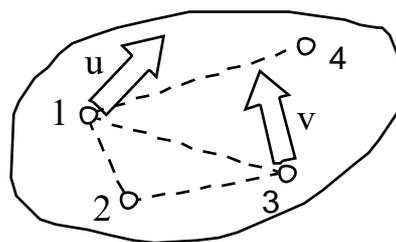


Figura 31. Sólido modelizado con cuatro puntos y dos vectores unitarios.

Los tres segmentos seleccionados como base serán, en este caso, el vector $\vec{12}$, el vector $\vec{13}$, y el vector \mathbf{u} . Por tanto, el punto 4 y el vector \mathbf{v} serán expresados en función de la base. Dado que el número de variables utilizadas para definir este elemento es dieciocho y el elemento tiene seis grados de libertad, habrá que establecer doce ecuaciones de restricción. Son las siguientes:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - L_{12}^2 = 0 \quad (116)$$

$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 - L_{13}^2 = 0 \quad (117)$$

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - 1 = 0 \quad (118)$$

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1) + (z_2 - z_1)(z_3 - z_1) - c_1 = 0 \quad (119)$$

$$(x_2 - x_1)u_x + (y_2 - y_1)u_y + (z_2 - z_1)u_z - c_2 = 0 \quad (120)$$

$$(x_3 - x_1)u_x + (y_3 - y_1)u_y + (z_3 - z_1)u_z - c_3 = 0 \quad (121)$$

$$(x_4 - x_1) - \alpha(x_2 - x_1) - \beta(x_3 - x_1) - \mu_x = 0 \quad (122)$$

$$(y_4 - y_1) - \alpha(y_2 - y_1) - \beta(y_3 - y_1) - \mu_y = 0 \quad (123)$$

$$(z_4 - z_1) - \alpha(z_2 - z_1) - \beta(z_3 - z_1) - \mu_z = 0 \quad (124)$$

$$v_x - \alpha(x_2 - x_1) - \beta(x_3 - x_1) - \mu_x = 0 \quad (125)$$

$$v_y - \alpha(y_2 - y_1) - \beta(y_3 - y_1) - \mu_y = 0 \quad (126)$$

$$v_z - \alpha(z_2 - z_1) - \beta(z_3 - z_1) - \mu_z = 0 \quad (127)$$

Las seis primeras ecuaciones aseguran el carácter rígido de la base, las ecuaciones (122) a (124) expresan el punto 4 en función de la base, y las ecuaciones (125) a (127) expresan el vector unitario \mathbf{v} en función de la base.

4.2 Restricciones de par cinemático.

Como ya ocurría en el caso plano, el número de ecuaciones de restricción que deben introducirse por cada tipo de par cinemático se deduce fácilmente por el número de grados de libertad de movimiento relativo que restringe entre los elementos que une. Así, un par de clase II, como por ejemplo el par cilíndrico, permite dos movimientos relativos, es decir, restringe cuatro. Por tanto, habrá que establecer cuatro ecuaciones de restricción para imponer las condiciones de este par. En general, en un par de clase X, el número de ecuaciones de restricción a establecer será $6-X$.

A continuación se concretan las ecuaciones de restricción correspondientes a los distintos pares cinemáticos.

4.2.1 Par esférico.

También llamado rótula esférica. Se trata de un par de clase III, luego precisa tres ecuaciones de restricción. Sin embargo, si se modeliza de forma que los dos elementos conectados por el par compartan un punto –el centro de la rótula–, las tres condiciones quedan automáticamente establecidas, ya que implícitamente se está imponiendo la igualdad de las coordenadas x, y, z , de dicho punto como perteneciente a cada sólido.

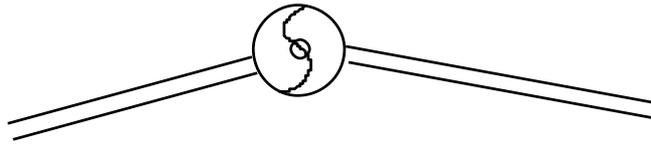


Figura 32. Par esférico.

Por supuesto, es posible modelizar con un punto diferente para cada sólido. Las tres ecuaciones de restricción son entonces las obtenidas al establecer la igualdad entre las tres coordenadas cartesianas de ambos puntos. Sin embargo, esta decisión llevará a un tamaño mayor del problema.

4.2.2 Par de revolución.

Se trata de la articulación en el espacio. Es un par de clase I, por lo que precisa cinco restricciones. Si se modeliza con un punto del eje del par y un vector unitario en la dirección del mismo compartidos por los dos elementos vecinos, se introducen automáticamente las condiciones del par, ya que sólo se permite a los elementos un movimiento relativo de giro alrededor del eje del par. En efecto, la compartición del punto implica tres ecuaciones y la compartición del vector unitario otras dos, completando las cinco que requería este par.

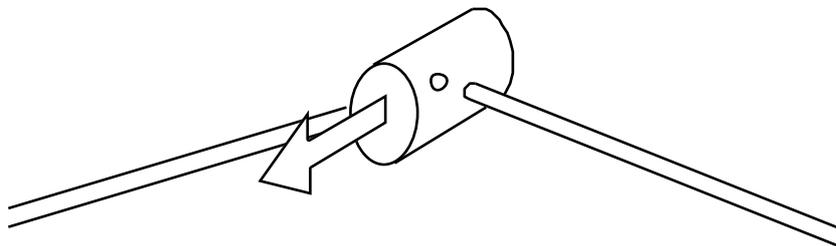


Figura 33. Par de revolución espacial.

También cabe otra modelización consistente en compartir dos puntos sobre el eje del par. Es una modelización equivalente a la anterior que tampoco precisa la introducción explícita de ecuación de restricción alguna.

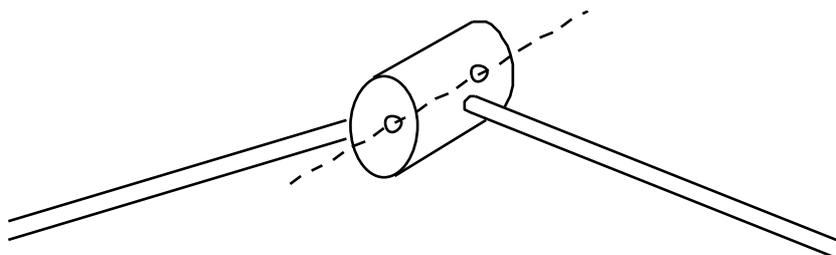


Figura 34. Otra modelización del par de revolución.

Por supuesto, en ambas modelizaciones, pueden no compartirse puntos y/o vectores unitarios, considerando variables distintas según pertenezcan a uno u otro sólido. En ese caso, sí habrá que establecer ecuaciones de restricción, que no serán otras que las correspondientes a imponer la igualdad entre las coordenadas de puntos y componentes de vectores unitarios de ambos elementos.

4.2.3 Par cilíndrico.

Este par es de clase II. Restringe por tanto cuatro movimientos, luego habrá que imponer cuatro ecuaciones de restricción. Las modelizaciones posibles de este par son diversas. Si se modeliza como aparece en la figura 35, dos restricciones son automáticamente impuestas al compartirse el vector unitario 1.

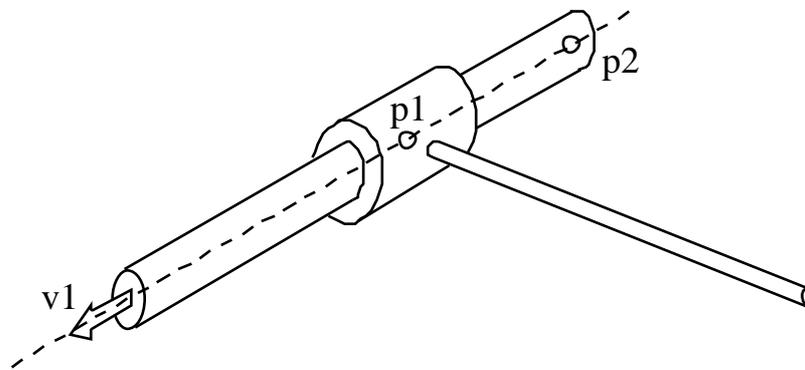


Figura 35. Par cilíndrico.

Las otras dos restricciones proceden de imponer que el vector formado por los puntos 1 y 2 se encuentre alineado permanentemente con el vector unitario 1. Esta condición se expresa matemáticamente mediante el producto vectorial de ambos vectores, que da lugar a tres ecuaciones de las cuales sólo dos son independientes, aquéllas correspondientes a las dos mayores componentes del vector unitario 1.

$$(y_2 - y_1)v_{1z} - (z_2 - z_1)v_{1y} = 0 \quad (128)$$

$$(z_2 - z_1)v_{1x} - (x_2 - x_1)v_{1z} = 0 \quad (129)$$

$$(x_2 - x_1)v_{1y} - (y_2 - y_1)v_{1x} = 0 \quad (130)$$

Como siempre en estos casos, cabe la posibilidad de elegir en cada instante qué dos ecuaciones son las idóneas, o bien introducir las tres en todo momento, yendo a un sistema de ecuaciones redundantes.

4.2.4 Par prismático.

El par prismático es de clase I. La única diferencia que presenta con el par cilíndrico es que restringe el giro relativo entre elementos alrededor del eje del par. Por tanto, su modelización será similar a la del par cilíndrico, si bien habrá que establecer una condición que impida dicho giro relativo.

En la figura 36 se muestra una modelización del par prismático análoga a la vista anteriormente para el par cilíndrico.

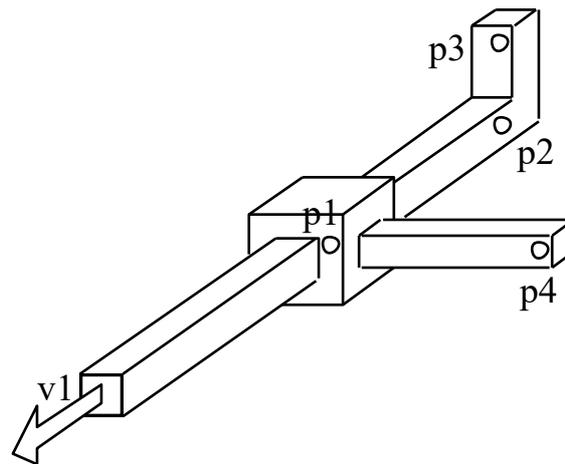


Figura 36. Par prismático.

Dado que se ambos sólidos comparten el vector unitario 1, hay dos restricciones impuestas automáticamente. Faltan, por tanto, otras tres. Las dos primeras procederán de asegurar que los puntos 1 y 2 se encuentren siempre alineados con el vector unitario 1. Esto se hará mediante una ecuación de producto vectorial, exactamente del mismo modo en que se hizo para el par cilíndrico. La última ecuación de restricción será un producto escalar constante entre dos vectores no paralelos al eje del par. En este caso, servirán los vectores formados por los puntos 1, 4 y 2, 3 respectivamente. Veamos ya las ecuaciones descritas.

$$(y_2 - y_1)v_{1z} - (z_2 - z_1)v_{1y} = 0 \quad (131)$$

$$(z_2 - z_1)v_{1x} - (x_2 - x_1)v_{1z} = 0 \quad (132)$$

$$(x_2 - x_1)v_{1y} - (y_2 - y_1)v_{1x} = 0 \quad (133)$$

$$(x_4 - x_1)(x_3 - x_2) + (y_4 - y_1)(y_3 - y_2) + (z_4 - z_1)(z_3 - z_2) - c = 0 \quad (134)$$

Como ya se dijo antes, de las tres ecuaciones del producto vectorial sólo dos son independientes. Por tanto, hay que elegir sólo dos de las ecuaciones (131) a (133). Por supuesto, pueden introducirse las tres, yendo a un sistema de ecuaciones redundantes.

Ya se ha comentado que las modelizaciones pueden ser diversas. Lo importante es definir puntos y vectores unitarios suficientes para permitir después restringir todos los movimientos relativos entre sólidos que realmente restringe el par. Para concretar esta idea, supongamos un par prismático modelizado de otra forma, y veamos cómo proceder.

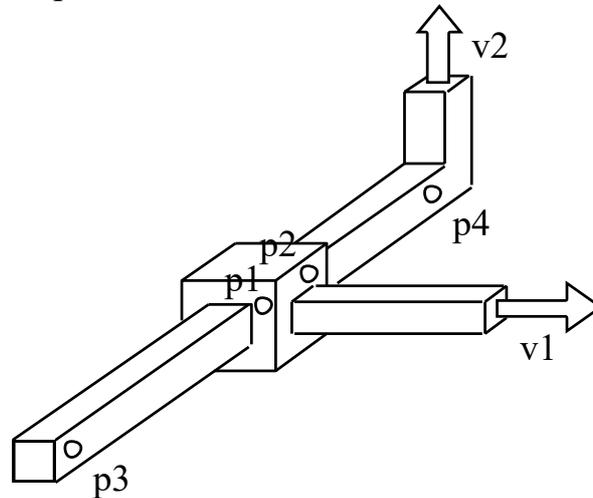


Figura 37. Otra modelización del par prismático.

Ahora no se comparten puntos ni vectores unitarios entre los elementos. Entonces, por ser este un par de clase I, habrá que imponer cinco ecuaciones de restricción. Son las siguientes:

$$(y_2 - y_1)(z_3 - z_1) - (z_2 - z_1)(y_3 - y_1) = 0 \quad (135)$$

$$(z_2 - z_1)(x_3 - x_1) - (x_2 - x_1)(z_3 - z_1) = 0 \quad (136)$$

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) = 0 \quad (137)$$

$$(y_2 - y_1)(z_4 - z_1) - (z_2 - z_1)(y_4 - y_1) = 0 \quad (138)$$

$$(z_2 - z_1)(x_4 - x_1) - (x_2 - x_1)(z_4 - z_1) = 0 \quad (139)$$

$$(x_2 - x_1)(y_4 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_4 - x_1) = 0 \quad (140)$$

$$v1_x v2_x + v1_y v2_y + v1_z v2_z - c = 0 \quad (141)$$

Las tres primeras ecuaciones obligan al punto 3 a permanecer alineado con 1 y 2 merced a un producto vectorial nulo. Lógicamente, sólo dos de ellas son independientes. Las tres ecuaciones siguientes obligan al punto 4 a mantenerse en línea con 1 y 2, análogamente a como lo hacían las anteriores con el punto 3. Por tanto, también habrá que elegir dos. Por último, la ecuación (141) restringe el giro relativo entre los dos elementos alrededor del eje del par imponiendo el valor constante del producto escalar entre los vectores unitarios 1 y 2. Como siempre, lo más cómodo será introducir las siete ecuaciones, aunque sólo cinco sean independientes, generando ecuaciones redundantes.

4.2.5 Junta Universal.

La junta universal o par de Cardan, sirve para transmitir giros entre ejes no paralelos que se cortan. Se trata de un par de clase II, que restringe por tanto cuatro movimientos relativos entre los elementos que une.

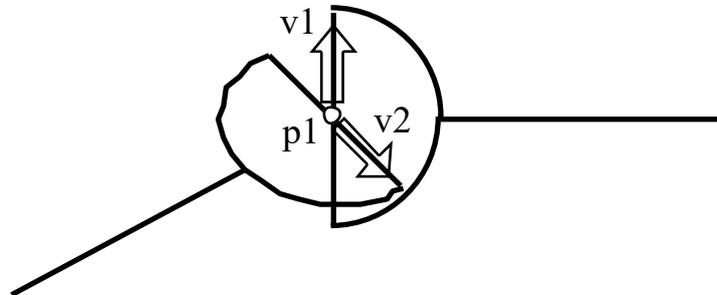


Figura 38. Junta Universal.

En la figura 38 se muestra una posible modelización de este par. El punto 1, punto de corte de los dos ejes, es compartido por ambos elementos, lo que automáticamente introduce tres restricciones. La condición restante procede del carácter rígido de la cruceta, que se expresará imponiendo que el producto escalar entre los vectores unitarios 1 y 2 se mantenga constante.

$$v1_x v2_x + v1_y v2_y + v1_z v2_z - c = 0 \quad (142)$$

Como en casos anteriores, de no compartirse el punto 1, habría que añadir tres ecuaciones de restricción adicionales que indicaran que ese punto material es siempre coincidente para ambos sólidos.

Por supuesto, existen muchos más tipos de pares cinemáticos en el caso tridimensional. Sin embargo, vistos los anteriores, el lector estará en condiciones de modelizar cualquier tipo de par que pueda presentarse.

4.3 Coordenadas mixtas.

El significado de las coordenadas mixtas en el caso tridimensional es exactamente el mismo que en el caso plano. También del mismo modo, será necesario introducir una nueva ecuación de restricción por cada nueva coordenada relativa –ángulo o distancia– que se quiera considerar. La única diferencia del caso espacial con el plano radica en la forma de las ecuaciones de restricción, que se muestran a continuación.

4.3.1 Ecuación de ángulo.

Supongamos que se desea establecer un ángulo entre dos elementos unidos por un par de revolución, estando definido el conjunto según aparece en la figura 39.

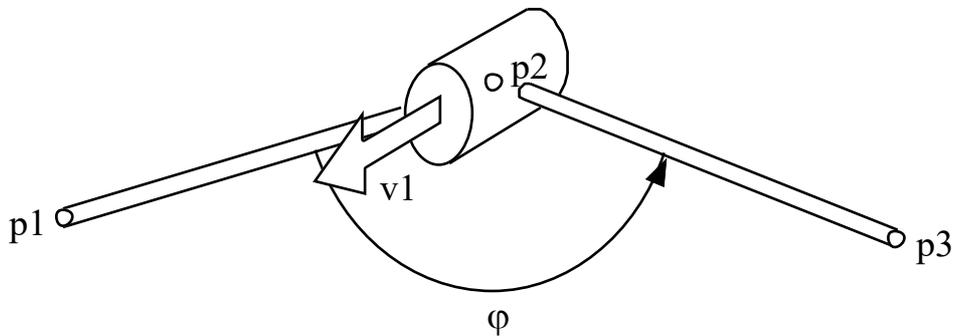


Figura 39. Ángulo entre dos elementos.

Al igual que sucedía en el caso plano, se puede utilizar la ecuación en coseno, obtenida a partir de un producto escalar, o la ecuación en seno, obtenida a partir de un producto vectorial. La validez de cada una en función del valor del ángulo sigue el criterio ya explicado en el caso plano.

La ecuación en coseno se expresa como,

$$(x_3 - x_2)(x_1 - x_2) + (y_3 - y_2)(y_1 - y_2) + (z_3 - z_2)(z_1 - z_2) - L_{12}L_{23} \cos \varphi = 0 \quad (143)$$

ya que se trata del producto escalar entre los vectores formados por los puntos 2, 3 y 2, 1 respectivamente.

La ecuación en seno es una de las tres siguientes,

$$(y_1 - y_2)(z_3 - z_2) - (z_1 - z_2)(y_3 - y_2) - v1_x L_{12}L_{23} \operatorname{sen} \varphi = 0 \quad (144)$$

$$(z_1 - z_2)(x_3 - x_2) - (x_1 - x_2)(z_3 - z_2) - v1_y L_{12}L_{23} \operatorname{sen} \varphi = 0 \quad (145)$$

$$(x_1 - x_2)(y_3 - y_2) - (y_1 - y_2)(x_3 - x_2) - v1_z L_{12}L_{23} \operatorname{sen} \varphi = 0 \quad (146)$$

La ecuación que debe elegirse es la correspondiente a la mayor componente del vector unitario 1. Como siempre, lo más cómodo es introducir siempre las tres aunque sean redundantes.

4.3.2 Ecuación de distancia.

Supongamos que se desea considerar como variable la distancia asociada al par prismático de la figura 40, que se tomará como distancia entre el punto 2 y el punto 1.

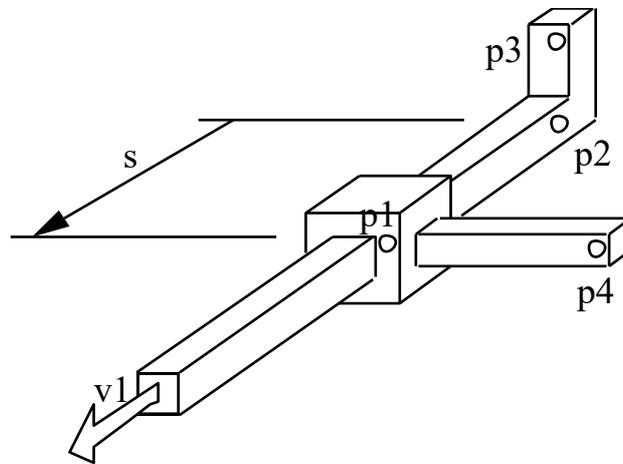


Figura 40. Distancia entre dos puntos.

Análogamente a como se hizo en el caso plano, la ecuación de restricción a considerar será una de las tres siguientes:

$$(x_1 - x_2) - s * v1_x = 0 \quad (147)$$

$$(y_1 - y_2) - s * v1_y = 0 \quad (148)$$

$$(z_1 - z_2) - s * v1_z = 0 \quad (149)$$

La ecuación a elegir es la correspondiente a la mayor componente del vector unitario 1, si bien pueden introducirse las tres como redundantes.

Al igual que ocurría en el caso plano, cabe también la posibilidad de utilizar la siguiente ecuación,

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - s^2 = 0 \quad (150)$$

si bien, como ya se dijo, esta expresión puede dar problemas cuando el signo de la distancia sea relevante, ya que la ecuación se verifica igualmente para un valor de s positivo o negativo.

4.4 Ejemplos.

Se trata de aplicar en este apartado todo lo visto en los apartados anteriores sobre modelización de mecanismos tridimensionales. Para ello, se plantean y resuelven varios ejemplos.

El criterio general de modelización es el siguiente: situar tantos puntos y vectores unitarios como sea necesario para definir correctamente cada par cinemático del mecanismo y, posteriormente, verificar que todos los elementos hayan quedado correctamente definidos. Si no es así, han de añadirse más puntos y/o vectores unitarios para conseguirlo.

Se indicarán en negro los puntos y vectores unitarios que sean variables del problema, y en blanco aquéllos que sean fijos.

Ejemplo 1: par de engranajes cónicos.

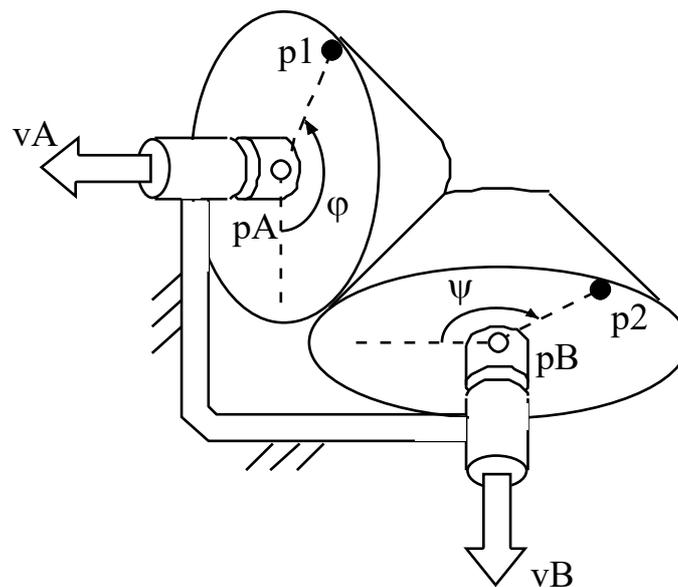


Figura 41. Par de engranajes cónicos.

Los pares de revolución entre el elemento fijo y los engranajes se han modelizado mediante la compartición de un punto y un vector unitario. Se han definido dos ángulos para facilitar la introducción de la condición cinemática que impone el par de engranaje, que es una relación lineal entre los ángulos. Los puntos 1 y 2 permiten situar a cada engranaje y definir los ángulos mencionados previamente. De esta forma, cada elemento queda modelizado con dos puntos y un vector unitario, que resulta suficiente para su correcta definición.

El sistema posee un único grado de libertad. Dado que se han utilizado ocho variables en su modelización, se precisan siete ecuaciones de restricción. Son las siguientes,

$$(x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2 + (z_1 - z_A)^2 - L_{A1}^2 = 0 \quad (151)$$

$$(x_1 - x_A)v_{Ax} + (y_1 - y_A)v_{Ay} + (z_1 - z_A)v_{Az} = 0 \quad (152)$$

$$(x_2 - x_B)^2 + (y_2 - y_B)^2 + (z_2 - z_B)^2 - L_{B2}^2 = 0 \quad (153)$$

$$(x_2 - x_B)v_{Bx} + (y_2 - y_B)v_{By} + (z_2 - z_B)v_{Bz} = 0 \quad (154)$$

$$(x_1 - x_A)v_{Bx} + (y_1 - y_A)v_{By} + (z_1 - z_A)v_{Bz} - L_{A1} \cos\varphi = 0 \quad (155)$$

$$(x_2 - x_B)v_{Ax} + (y_2 - y_B)v_{Ay} + (z_2 - z_B)v_{Az} - L_{B2} \cos\psi = 0 \quad (156)$$

$$\varphi_1 - c\varphi_2 - k = 0 \quad (157)$$

Las dos primeras ecuaciones proceden del carácter rígido de uno de los engranajes, y las dos siguientes del carácter rígido del otro. Las ecuaciones (155) y (156) definen los ángulos mediante ecuaciones en coseno (ya se sabe que dependiendo del valor de cada ángulo hay que introducir una ecuación en seno o en coseno) y la (157) establece la relación lineal entre los ángulos correspondiente al par de engranaje. La constante k será nula si ambos ángulos toman valor nulo a la vez.

Ejemplo 2: suspensión de un vehículo automóvil.

Se muestra en la figura 42 un mecanismo de suspensión de automóvil del tipo MacPherson. Los puntos 3 y 4 se han representado sombreados para mayor claridad.

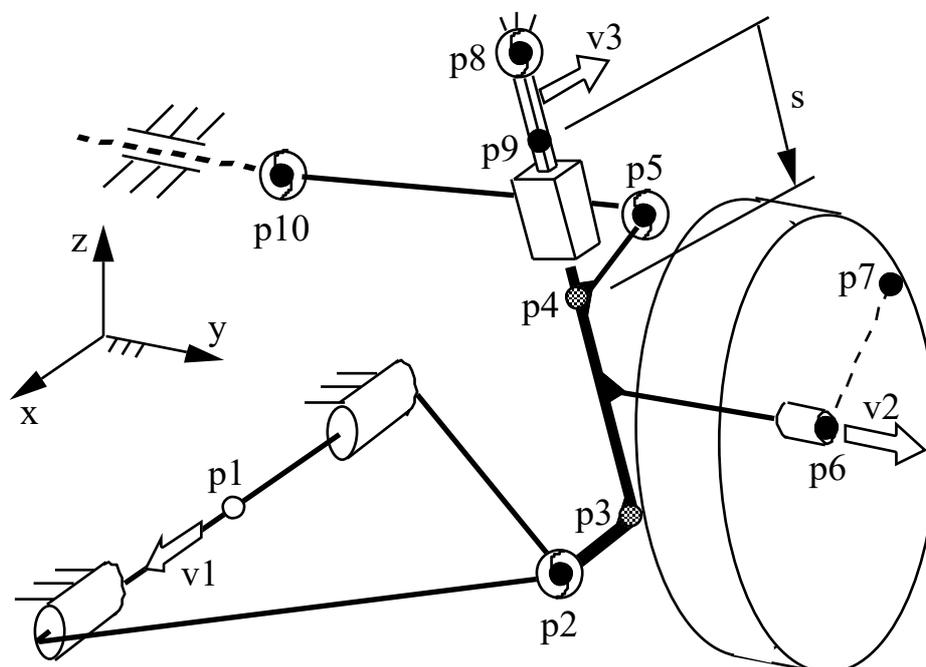


Figura 42. Suspensión MacPherson.

El mecanismo se ha modelizado mediante diez puntos, tres vectores unitarios y una coordenada relativa de distancia. Los puntos 1 y 8 así como el vector unitario 1 son fijos. En el punto 10 se consideran fijas las coordenadas x y z , de manera que dicho punto sólo puede moverse en y . De esta forma, se impone

automáticamente el par prismático que viene del mecanismo de dirección del vehículo, y que se ha representado a trazos.

Se ha definido una distancia en el par prismático donde irán montados los elementos de suspensión resorte y amortiguador, ya que será de gran utilidad al considerar estos elementos desde el punto de vista dinámico. El vector unitario 3 se ha definido en el elemento superior de dicho par prismático para permitir imponer la condición de restricción de giro relativo entre elementos alrededor del eje del par.

Con todo lo dicho, el número de variables empleadas para modelizar este mecanismo es de 29. Sus grados de libertad son tres: el giro del triángulo, que hace subir o bajar la suspensión, la traslación procedente de la dirección, que orienta la rueda, y la rotación de la rueda alrededor de su eje. Por tanto, habrá que establecer 26 ecuaciones de restricción que se detallan a continuación.

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - L_{12}^2 = 0 \quad (158)$$

$$(x_2 - x_1)v_{1x} + (y_2 - y_1)v_{1y} + (z_2 - z_1)v_{1z} - c_1 = 0 \quad (159)$$

$$(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 - L_{32}^2 = 0 \quad (160)$$

$$(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 + (z_4 - z_3)^2 - L_{34}^2 = 0 \quad (161)$$

$$v_{2x}^2 + v_{2y}^2 + v_{2z}^2 - 1 = 0 \quad (162)$$

$$(x_2 - x_3)v_{2x} + (y_2 - y_3)v_{2y} + (z_2 - z_3)v_{2z} - c_2 = 0 \quad (163)$$

$$(x_4 - x_3)v_{2x} + (y_4 - y_3)v_{2y} + (z_4 - z_3)v_{2z} - c_3 = 0 \quad (164)$$

$$(x_2 - x_3)(x_4 - x_3) + (y_2 - y_3)(y_4 - y_3) + (z_2 - z_3)(z_4 - z_3) - c_4 = 0 \quad (165)$$

$$(x_6 - x_3) - \alpha(x_2 - x_3) - \beta v_{2x} - \gamma(x_4 - x_3) = 0 \quad (166)$$

$$(y_6 - y_3) - \alpha(y_2 - y_3) - \beta v_{2y} - \gamma(y_4 - y_3) = 0 \quad (167)$$

$$(z_6 - z_3) - \alpha(z_2 - z_3) - \beta v_{2z} - \gamma(z_4 - z_3) = 0 \quad (168)$$

$$(x_5 - x_3) - \delta(x_2 - x_3) - \varepsilon v_{2x} - \phi(x_4 - x_3) = 0 \quad (169)$$

$$(y_5 - y_3) - \delta(y_2 - y_3) - \varepsilon v_{2y} - \phi(y_4 - y_3) = 0 \quad (170)$$

$$(z_5 - z_3) - \delta(z_2 - z_3) - \varepsilon v_{2z} - \phi(z_4 - z_3) = 0 \quad (171)$$

$$(x_9 - x_8)^2 + (y_9 - y_8)^2 + (z_9 - z_8)^2 - L_{89}^2 = 0 \quad (172)$$

$$(x_9 - x_8)v_{3x} + (y_9 - y_8)v_{3y} + (z_9 - z_8)v_{3z} = 0 \quad (173)$$

$$v_{3x}^2 + v_{3y}^2 + v_{3z}^2 - 1 = 0 \quad (174)$$

$$(x_{10} - x_5)^2 + (y_{10} - y_5)^2 + (z_{10} - z_5)^2 - L_{5,10}^2 = 0 \quad (175)$$

$$(x_7 - x_6)^2 + (y_7 - y_6)^2 + (z_7 - z_6)^2 - L_{67}^2 = 0 \quad (176)$$

$$(x_7 - x_6)v_{2x} + (y_7 - y_6)v_{2y} + (z_7 - z_6)v_{2z} = 0 \quad (177)$$

$$(y_4 - y_3)(z_8 - z_3) - (z_4 - z_3)(y_8 - y_3) = 0 \quad (178)$$

$$(z_4 - z_3)(x_8 - x_3) - (x_4 - x_3)(z_8 - z_3) = 0 \quad (179)$$

$$(x_4 - x_3)(y_8 - y_3) - (y_4 - y_3)(x_8 - x_3) = 0 \quad (180)$$

$$(y_4 - y_3)(z_9 - z_3) - (z_4 - z_3)(y_9 - y_3) = 0 \quad (181)$$

$$(z_4 - z_3)(x_9 - x_3) - (x_4 - x_3)(z_9 - z_3) = 0 \quad (182)$$

$$(x_4 - x_3)(y_9 - y_3) - (y_4 - y_3)(x_9 - x_3) = 0 \quad (183)$$

$$v_{2x}v_{3x} + v_{2y}v_{3y} + v_{2z}v_{3z} - c_5 = 0 \quad (184)$$

$$(x_4 - x_9)^2 + (y_4 - y_9)^2 + (z_4 - z_9)^2 - s^2 = 0 \quad (185)$$

Las ecuaciones (158) y (159) proceden del carácter rígido del triángulo. Las ecuaciones (160) a (165) establecen una base rígida para el elemento inferior de la suspensión. Las ecuaciones (166) a (171) sirven para situar a los puntos 6 y 5 del elemento inferior de la suspensión en la base anteriormente definida. Las ecuaciones (172) a (174) imponen carácter rígido al elemento superior de la suspensión. La ecuación (175) obliga a que la barra con dos rótulas en los extremos que procede del dispositivo de dirección sea rígida. Las ecuaciones (176) y (177) establecen la condición rígida de la llanta. Las ecuaciones (178) a (183) sirven para obligar al alineamiento de los elementos superior e inferior de la suspensión. De las tres primeras sólo dos son independientes y análogamente de las tres segundas. La ecuación (184) impide el giro relativo entre los elementos de suspensión superior e inferior unidos por el par prismático. La ecuación (185) introduce como variable la distancia entre el punto 4 y el punto 9, es decir, la distancia en el par prismático correspondiente. Esta última ecuación se ha establecido en esta forma porque no se espera que la distancia cambie de signo durante el movimiento. Caso de que pueda darse cambio de signo, se empleará la forma alternativa explicada al hablar de coordenadas relativas de distancia.

Se han obtenido, por tanto, 28 ecuaciones de restricción, en lugar de las 26 necesarias. Según ya se ha comentado, esto se debe a la existencia de dos ecuaciones dependientes. Como siempre, cabe la posibilidad de eliminar las dichas ecuaciones en cada instante, o considerarlas todas, generando un sistema redundante.

Ejemplo 3: dirección de un vehículo automóvil.

La figura 43 muestra esquemáticamente el mecanismo de dirección de un vehículo automóvil.

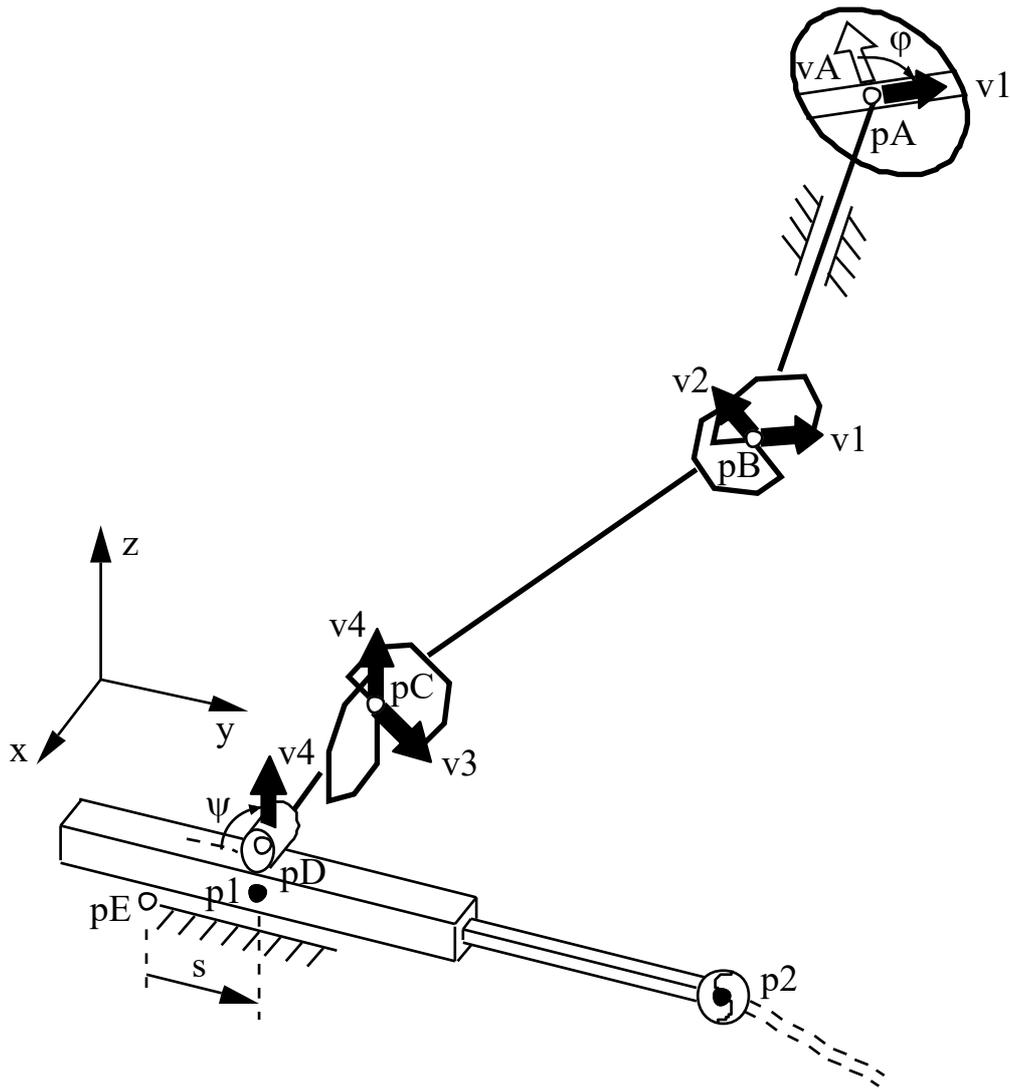


Figura 43. Mecanismo de dirección.

Para la modelización se han utilizado siete puntos, de los cuales cinco son fijos, cuatro vectores unitarios, todos móviles, dos ángulos y una distancia. Además, los puntos móviles, 1 y 2, tienen fijas las coordenadas x y z , pudiendo moverse sólo en y . De esta forma se simplifica la definición del par piñón-cremallera. El ángulo φ se ha introducido por tratarse del ángulo de giro del volante, que muy probablemente se desee guiar en una simulación cinemática o dinámica. El ángulo ψ y la distancia s tienen la misión de ayudar a definir el par piñón-cremallera.

Por lo tanto, el número de variables del problema es de 17. Dado que este mecanismo sólo posee un grado de libertad, será preciso establecer 16 ecuaciones de restricción que ligen las variables. Son las siguientes:

$$(x_B - x_A)v_{1x} + (y_B - y_A)v_{1y} + (z_B - z_A)v_{1z} = 0 \quad (186)$$

$$v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2 - 1 = 0 \quad (187)$$

$$v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y} + v_{1z}v_{2z} = 0 \quad (188)$$

$$v_{2x}^2 + v_{2y}^2 + v_{2z}^2 - 1 = 0 \quad (189)$$

$$v_{3x}^2 + v_{3y}^2 + v_{3z}^2 - 1 = 0 \quad (190)$$

$$(x_C - x_B)v_{2x} + (y_C - y_B)v_{2y} + (z_C - z_B)v_{2z} = 0 \quad (191)$$

$$(x_C - x_B)v_{3x} + (y_C - y_B)v_{3y} + (z_C - z_B)v_{3z} = 0 \quad (192)$$

$$v_{2x}v_{3x} + v_{2y}v_{3y} + v_{2z}v_{3z} = 0 \quad (193)$$

$$v_{3x}v_{4x} + v_{3y}v_{4y} + v_{3z}v_{4z} = 0 \quad (194)$$

$$v_{4x}^2 + v_{4y}^2 + v_{4z}^2 - 1 = 0 \quad (195)$$

$$(x_D - x_C)v_{4x} + (y_D - y_C)v_{4y} + (z_D - z_C)v_{4z} = 0 \quad (196)$$

$$v_{4y} - \cos\psi = 0 \quad (197)$$

$$(x_1 - x_E)^2 + (y_1 - y_E)^2 + (z_1 - z_E)^2 - s^2 = 0 \quad (198)$$

$$s - R\psi - c = 0 \quad (199)$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - L_{12}^2 = 0 \quad (200)$$

$$v_{1x}v_{Ax} + v_{1y}v_{Ay} + v_{1z}v_{Az} - \cos\phi = 0 \quad (201)$$

Las ecuaciones (186) y (187) imponen el carácter rígido del primer sólido de la cadena cinemática –el que lleva el volante–. La ecuación (188) corresponde a la primera junta universal. Las ecuaciones (189) a (193) establecen las condiciones de sólido rígido para el siguiente elemento de la cadena. La ecuación (194) corresponde a la segunda junta universal. Las ecuaciones (195) y (196) son las condiciones de sólido rígido del elemento que lleva incorporado el piñón. La ecuación (197) define el ángulo de giro del piñón, la (198) define la distancia en la cremallera, y la (199) indica la relación entre ambas coordenadas relativas, sirviendo así para definir el par piñón-cremallera. La ecuación (200) es una condición de distancia constante entre dos puntos de la cremallera. Por último, la ecuación (201) sirve para definir el ángulo del volante.