

# ESTUDIO DE LA MODELIZACIÓN DE SISTEMAS MULTICUERPO FLEXIBLES PARA UN ANALISIS EFICIENTE CON NO LINEALIDAD GEOMETRICA

Ruth Gutiérrez, Urbano Lugrís, Javier Cuadrado y Luis E. Romera

Departamento de Ingeniería Industrial II  
Escuela Politécnica Superior  
Universidad de A Coruña  
C/ Esteiro s/n  
e-mail: rutgut@udc.es

**Palabras clave:** Simulación, Sistemas Multicuerpo Flexibles, Rigidización geométrica, Eficiencia

**Resumen.** *El diseño y cálculo de sistemas mecánicos con componentes flexibles frecuentemente requiere, además de la información del movimiento, el estado tensional. La industria demanda sistemas mecanismos que son cada vez más desafiantes para el diseñador, siendo la agilidad un valor muy apreciable y las herramientas de simulación un aspecto clave del proceso de diseño. En este trabajo se presenta la adaptación de una metodología de análisis de sistemas multicuerpo flexibles para contemplar no linealidades geométricas como el fenómeno de rigidización dinámica. Se ensayan varias propuestas que permitan mantener la eficiencia y mejorar la precisión.*

## 1. INTRODUCCIÓN

El diseño y cálculo de sistemas mecánicos con componentes flexibles frecuentemente requiere, además de la información del movimiento, el estado tensional. La industria asociada demanda sistemas mecanismos que son cada vez más desafiantes para el diseñador, más versátiles, más flexibles, que operan a mayor velocidad, se emplean nuevos materiales... etc. El tiempo que transcurre desde la necesidad de un nuevo diseño, hasta su puesta en el mercado es inversamente proporcional al beneficio obtenido y, en algunos casos, determinante por la competencia existente. Así, la agilidad es un valor muy apreciable que las herramientas de simulación posibilitan.

Existen dos grandes familias de formulaciones que permiten la obtención de tensiones en mecanismos: la familia basada en la aproximación de sistema de referencia móvil y la familia de formulaciones globales. La primera estudia el movimiento de gran amplitud de cada componente y el movimiento de pequeña amplitud debido a la deformación a través

de coordenadas distintas, definiendo estas últimas en un sistema de referencia móvil asociado con el componente flexible considerado. La segunda familia no realiza esta separación, utilizando coordenadas en un sistema de referencia inercial. Ambas presentan ventajas e inconvenientes en su aplicación. La familia que emplea sistemas de referencia móviles se aplica a mecanismos cuyos componentes trabajan bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones. La familia de métodos globales contempla hipótesis de trabajo más amplias, permitiendo abordar problemas con no linealidad geométrica, de grandes deformaciones, comportamiento no lineal del material, cambio de condiciones de contorno, etc. Sin embargo, esta familia de métodos necesita un número elevado de variables y emplea siempre las complejas relaciones necesarias para abordar estos problemas, incluso cuando el comportamiento es sencillo. Por comparación, el número de variables que necesita emplear la primera permanece moderado. Además, en la práctica, existe un gran número de mecanismos en los que la hipótesis de pequeñas deformaciones de componentes resulta adecuada. Por ello, esta primera familia de formulaciones, que es la más extendida, presenta ventajas importantes que justifican su estudio en el marco de la mejora de las herramientas de simulación para diseño de mecanismos.

En trabajos anteriores se ha presentado una metodología de análisis dinámico de sistemas multicuerpo con componentes flexibles, basado en la aproximación de sistema de referencia móvil, que proporciona soluciones fiables de movimiento, deformación y tensión en componentes, bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones, a un coste computacional excelente.

En este trabajo se describe la adaptación de dicha metodología para contemplar no linealidades geométricas como el fenómeno de rigidización dinámica. Se comprueba que capta perfectamente dicho fenómeno, comparando los resultados producidos por la misma sobre un ejemplo tipo benchmark, con los ofrecidos por la literatura.

A continuación se ensayan propuestas para determinar una formulación óptima para el cálculo de esfuerzos, que permita mejorar la precisión manteniendo la eficiencia de la metodología, y clarifiquen el rango de aplicación de dicha metodología.

Dichas propuestas son dos: en primer lugar, la introducción de un mayor número de modos de deformación que complete el campo de desplazamientos supuesto, y en segundo lugar, el empleo de otras coordenadas para los desplazamientos de pequeña magnitud, menos habituales en el estudio de sistemas mecánicos con componentes flexibles. De la comparación de esfuerzos con un programa de elementos finitos se extraen conclusiones respecto a la precisión del método propuesto.

Finalmente, se analiza la eficiencia, con el objetivo de conseguir tiempo real en la simulación de este tipo de sistemas mecánicos en ordenadores convencionales.

La descripción de la metodología de análisis dinámico de sistemas multicuerpo flexibles, denominada en adelante metodología DSMF, que permite la simulación dinámica de sistemas multicuerpo con elementos rígidos y flexibles de una forma totalmente compatible y que produce resultados precisos y eficientes se efectúa en [1].

## 2. ADAPTACIÓN DE LA METODOLOGIA DSMF ANTE EL FENOMENO DE RIGIDIZACIÓN GEOMETRICA.

Se ha demostrado la incapacidad de los modelos dinámicos basados en las relaciones lineales deformación-desplazamiento para reproducir el fenómeno de rigidización geométrica [2], fenómeno crucial en la modelización, por ejemplo, de vigas esbeltas experimentando grandes rotaciones de sólido rígido a velocidades elevadas. En casos como éste, es necesario introducir la no linealidad geométrica en el modelo.

En el contexto de la simulación de sistemas multicuerpo, el objetivo es encontrar el vector de fuerzas internas elásticas basado en las relaciones cinemáticas no lineales deformación-desplazamiento, manteniendo la aproximación de sistema de referencia móvil en la descripción del movimiento. En este caso, el tratamiento del movimiento de sólido rígido de cada cuerpo se independiza de la modelización de la deformación, permitiendo una relativamente fácil extensión de muchas de las formulaciones dinámicas existentes a regímenes de movimiento donde los efectos geométricos no lineales son importantes.

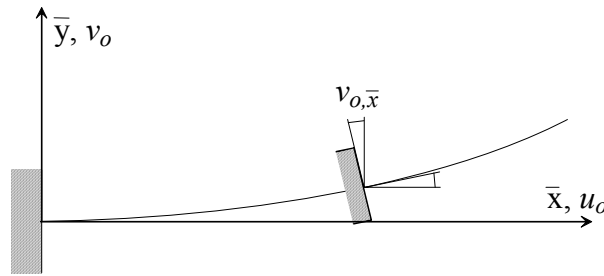


Figura 1. Desplazamientos elásticos de una viga plana de Euler-Bernoulli.

El fenómeno de rigidización geométrica en vigas se ha introducido efectuando la descripción cinemática del campo de deformaciones en términos de los desplazamientos elásticos convencionales, e introduciendo las relaciones deformación-desplazamiento no lineales en la formulación de la energía de deformación.

Se realiza el planteamiento en una viga esbelta (hipótesis de Euler-Bernoulli) de sección constante  $A$ , inercia  $I$  y longitud  $L$ , con movimiento plano, cuyo campo de desplazamientos elásticos queda descrito por el vector  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_o - yv_{o,\bar{x}} \\ v_o \end{bmatrix} \quad (1)$$

Siendo  $u_o$  y  $v_o$  los desplazamientos en las direcciones axial y perpendicular de la viga de los puntos del eje elástico, respectivamente, y  $v_{o,\bar{x}} = \frac{\partial v_{o,\bar{x}}}{\partial \bar{x}}$  el giro de la sección. El planteamiento es generalizable a vigas con movimiento espacial [3]. Las relaciones deformación-desplazamiento no lineales para este sistema se concretan en la siguiente expresión:

$$E_{xx} = u_{,\bar{x}} + \frac{1}{2} \left[ (u_{,\bar{x}})^2 + (v_{,\bar{x}})^2 \right] \cong u_{,\bar{x}} + \frac{1}{2} (v_{,\bar{x}})^2 \quad (2)$$

Es una práctica habitual despreciar el término  $(u_{,x})^2$  frente a  $u_{,x}$ . Se formula la función energía de deformación:

$$V = \frac{E}{2} \int_V (E_{xx})^2 dV \quad (3)$$

Introduciendo la expresión (1) del campo de desplazamientos y desarrollando se obtienen los siguientes términos,

$$V = \underbrace{\frac{EA}{2} \int_L (u_{o,\bar{x}})^2 dx}_{V_1} + \underbrace{\frac{EI}{2} \int_L (v_{o,\bar{x}\bar{x}})^2 dx}_{V_2} + \underbrace{\frac{EA}{8} \int_L (v_{o,\bar{x}})^4 dx}_{V_2} + \underbrace{\frac{EA}{2} \int_L u_{o,\bar{x}} (v_{o,\bar{x}})^2 dx}_{V_3} \quad (4)$$

Despreciando el término  $V_2$ , la expresión de la energía potencial queda

$$V = \frac{EA}{2} \int_L (u_{o,\bar{x}})^2 dx + \frac{EI}{2} \int_L (v_{o,\bar{x}\bar{x}})^2 dx + \frac{EA}{2} \int_L u_{o,\bar{x}} (v_{o,\bar{x}})^2 dx \quad (5)$$

en la que, además de los términos clásicos, se ha incluido el término de tercer orden que acopla el desplazamiento axial y el desplazamiento transversal.

Se considera un elemento finito tipo viga de Euler Bernouilli con movimiento plano, con tres grados de libertad por nudo, los dos desplazamientos en el plano y el giro respecto de la dirección perpendicular al mismo. El elemento finito, el vector de grados de libertad nodales y las funciones de aproximación empleadas para interpolar el campo de desplazamientos se muestran en la Figura 2.

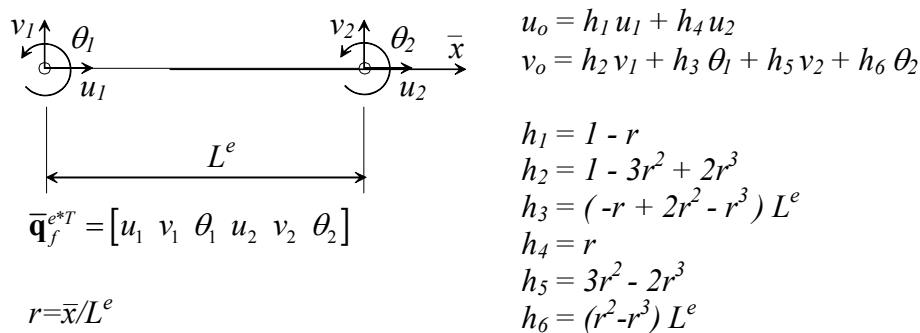


Figura 2. Elemento finito viga con movimiento plano: funciones de interpolación y grados de libertad.

En la expresión (5) de la energía potencial, se introduce el campo de desplazamientos propuesto para este elemento, reflejado en la Figura 2, y se obtiene la energía de deformación para un elemento finito:

$$V^e = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{q}}_f^{e*T} \mathbf{K}_{LMEF}^e \bar{\mathbf{q}}_f^{e*} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{q}}_f^{e*T} \mathbf{K}_{GMEF}^e \bar{\mathbf{q}}_f^{e*} \quad (6)$$

siendo  $\bar{\mathbf{q}}_f^{e*}$  el vector de desplazamientos nodales del elemento finito y,  $\mathbf{K}_{LMEF}^e$  y  $\mathbf{K}_{GMEF}^e$ , las matrices de rigidez clásicas lineal y geométrica, respectivamente, del método de elementos finitos, para dicho elemento.

$$\mathbf{K}_{LMEF}^e = \begin{bmatrix} EA/L^e & 0 & 0 & -EA/L^e & 0 & 0 \\ & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ & & 4EI/L^e & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L^e \\ & & & EA/L^e & 0 & 0 \\ sim & & & & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ & & & & & 4EI/L^e \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{K}_{GMEF}^e = \frac{EA}{L^e} (u_2 - u_1) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 6/5L^e & 1/10 & 0 & -6/5L^e & 1/10 \\ & & 2L^e/15 & 0 & -1/10 & L^e/30 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 6/5L^e & -1/10 \\ sim & & & & & 2L^e/15 \end{bmatrix} \quad (8)$$

La matriz de rigidez geométrica depende linealmente de los desplazamientos nodales axiales del elemento. Para poner de manifiesto esta dependencia, dicha matriz se puede descomponer en una matriz constante, denominada  $\mathbf{K}_{GLMEF}^e$ , que depende únicamente de la longitud elemental y afecta únicamente a los grados de libertad  $v$  y  $\theta$ , multiplicada por el factor  $\frac{EA}{L^e} (u_2 - u_1)$ . Así, la expresión (6) queda:

$$V^e = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{q}}_f^{e*T} \mathbf{K}_{LMEF}^e \bar{\mathbf{q}}_f^{e*} + \frac{1}{2} \frac{EA}{L^e} (u_2 - u_1) \bar{\mathbf{q}}_f^{e*T} \mathbf{K}_{GLMEF}^e \bar{\mathbf{q}}_f^{e*} \quad (9)$$

Se considera un sólido flexible discretizado en  $nef$  elementos finitos de igual longitud  $L^e$  y sección  $A$ , y  $nnd$  nudos. La energía de deformación para este sólido flexible se construye a partir de la contribución de cada uno de los elementos finitos, y viene dada por la expresión:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nef} \bar{\mathbf{q}}_f^{i*T} \mathbf{K}_{LMEF}^i \bar{\mathbf{q}}_f^{i*} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{nef} \frac{EA}{L^i} (u_2^i - u_1^i) \bar{\mathbf{q}}_f^{i*T} \mathbf{K}_{GLMEF}^i \bar{\mathbf{q}}_f^{i*} \quad (10)$$

En esta expresión se emplean las matrices de rigidez elementales ampliadas al tamaño del

vector de grados de libertad de la discretización,  $\bar{\mathbf{q}}_f^{*T}$ .

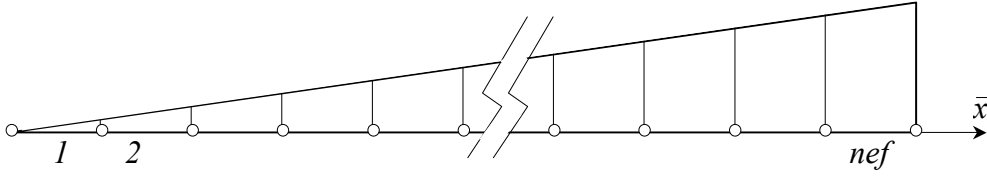


Figura 3. Campo de desplazamientos axiales en la discretización de elementos finitos.

Se considera una variación lineal para el campo de desplazamientos axiales en el interior del sólido flexible. En este caso, se cumple que el factor que introduce la no linealidad en la matriz de rigidez geométrica es constante e igual para todos los elementos:

$$EA \frac{(u_2^i - u_1^i)}{L^i} = EA \frac{\Delta L^i}{L^i} = EA \frac{\Delta L}{L} = P \quad (11)$$

Esto permite el ensamblaje de las matrices de rigidez elementales, para formar la matriz de rigidez geométrica global de la discretización.

$$\begin{aligned} V &= \sum_{i=1}^{nef} \left[ \frac{1}{2} \bar{\mathbf{q}}_f^{*T} \mathbf{K}_{LMEF}^i \bar{\mathbf{q}}_f^* + \frac{1}{2} P \bar{\mathbf{q}}_f^{*T} \mathbf{K}_{GLMEF}^i \bar{\mathbf{q}}_f^* \right] = \\ &= \frac{1}{2} \bar{\mathbf{q}}_f^{*T} \left( \sum_{i=1}^{nef} \mathbf{K}_{LMEF}^i \right) \bar{\mathbf{q}}_f^* + \frac{1}{2} P \bar{\mathbf{q}}_f^{*T} \left( \sum_{i=1}^{nef} \mathbf{K}_{GLMEF}^i \right) \bar{\mathbf{q}}_f^* = \\ &= \frac{1}{2} \bar{\mathbf{q}}_f^{*T} \mathbf{K}_{LMEF} \bar{\mathbf{q}}_f^* + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{q}}_f^{*T} P \mathbf{K}_{GLMEF} \bar{\mathbf{q}}_f^* \end{aligned} \quad (12)$$

En esta expresión, la carga axial,  $P$ , es constante para todos los elementos de la discretización, de valor proporcional al incremento de longitud del sólido elástico en cada instante de tiempo. La matriz de rigidez geométrica para una discretización cualquiera se puede obtener, en una fase de preproceso, de un programa comercial de elementos finitos, para cargas unitarias. Se introduce en la formulación multiplicada por el factor  $P$  en cada instante de tiempo. Así, la energía de deformación es,

$$V = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{q}}_f^{*T} \mathbf{K}_{MEF} \bar{\mathbf{q}}_f^* \quad (13)$$

expresión en la que la matriz de rigidez del método de elementos finitos está compuesta de dos términos, la matriz de rigidez constante y la matriz de rigidez geométrica.

$$\mathbf{K}_{MEF} = \mathbf{K}_{LMEF} + P \mathbf{K}_{GLMEF} \quad (14)$$

En cada instante de tiempo, la deformación del sistema queda determinada por el producto de los modos de deformación multiplicados por las amplitudes correspondientes.

$$\bar{\mathbf{q}}_f^* = \begin{bmatrix} u_{oi} \\ v_{oi} \\ \theta_i \\ \vdots \\ u_{onnd} \\ v_{onnd} \\ \theta_{nnd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Phi}_1 & \dots & \bar{\Phi}_{ne} & \bar{\Psi}_1 & \dots & \bar{\Psi}_{nd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{ne} \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{nd} \end{bmatrix} = \mathbf{X} \mathbf{y} \quad (15)$$

siendo  $u_{oi}$  y  $v_{oi}$  los desplazamientos del eje elástico en cada instante de tiempo en el sistema de referencia móvil, y  $\theta_i$  el ángulo girado por la sección, correspondientes al nudo  $i$ . Sustituyendo en la expresión (13) de la energía potencial, se obtiene

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{X}^T \mathbf{K}_{LMEF} \mathbf{X} \mathbf{y} + \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{X}^T P \mathbf{K}_{GLMEF} \mathbf{X} \mathbf{y} \quad (16)$$

Del producto  $\mathbf{X}^T \mathbf{K}_{LMEF} \mathbf{X}$  se obtiene la matriz de rigidez constante  $\mathbf{K}_L$  del sólido flexible referida a las variables modales. El producto  $\mathbf{X}^T P \mathbf{K}_{GLMEF} \mathbf{X}$  es el término de la matriz de rigidez responsable del efecto de rigidización dinámica, y de él se obtiene la matriz de rigidez geométrica  $\mathbf{K}_G$  del sólido flexible referida a las variables modales.

Así, la energía de deformación referida a las variables modales queda

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{K} \mathbf{y} \quad \text{con} \quad \mathbf{y}^T = [\boldsymbol{\eta}^T \quad \boldsymbol{\xi}^T] \quad (17)$$

El vector de fuerzas elásticas del sólido flexible considerado se obtiene a partir de esta expresión, derivando respecto a las variables básicas de dicho sólido:

$$\mathbf{Q}_{elast} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} \begin{cases} \text{si } \mathbf{q} \neq \mathbf{y} & \mathbf{Q}_{elast} = \mathbf{0} \\ \text{si } \mathbf{q} = \mathbf{y} & \mathbf{Q}_{elast} = -\mathbf{K} \mathbf{y} \end{cases} \quad (18)$$

siendo  $\mathbf{q}^T = [\mathbf{r}_0^T \quad \mathbf{u}^T \quad \mathbf{v}^T \quad \mathbf{w}^T \quad \boldsymbol{\eta}^T \quad \boldsymbol{\xi}^T]$  el vector de variables básicas del sólido flexible considerado, y  $\mathbf{K}$  la matriz de rigidez proyectada a los modos. Dicho vector, puede ser expresado en forma compacta como

$$\mathbf{Q}_{elast} = -\mathbf{K} \mathbf{q} \quad (19)$$

## 2.1. Cálculo de esfuerzos.

El vector de variables de un sistema mecánico incluye las amplitudes de los modos de deformación estáticos y dinámicos de cada componente considerado flexible. Dichas

amplitudes determinan el campo de desplazamientos elásticos de un componente flexible, en el sistema de referencia móvil asociado a dicho sólido flexible,  $\bar{\mathbf{q}}_f$ , y su estado tensional, que se obtiene al final de cada paso de tiempo.

$$\bar{\mathbf{q}}_f = \sum_{i=1}^{ne} \bar{\Phi}_i \eta_i + \sum_{j=1}^{nd} \bar{\Psi}_j \xi_j \quad (20)$$

Este vector contiene los desplazamientos nodales del componente estructural considerado flexible. La extracción de los desplazamientos nodales elementales,  $\hat{\mathbf{u}}$ , en los puntos de cálculo permiten la obtención del estado tensional en dichos puntos, retomando la discretización de elementos finitos,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{CB}\hat{\mathbf{u}} \quad (21)$$

Para obtener los esfuerzos en una discretización de elementos viga, en la que la forma analítica de los modos de deformación es conocida, en primer lugar se obtiene la posición deformada de la barra en el sistema de referencia móvil multiplicando dichas funciones por las amplitudes de los modos de deformación según la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} u_o &= \Phi_1 \eta_1 \\ v_o &= \Phi_2 \eta_2 + \Psi_1 \xi_1 + \Psi_2 \xi_2 \\ \theta &= v'_o = \Phi'_2 \eta_2 + \Psi'_1 \xi_1 + \Psi'_2 \xi_2 \end{aligned} \quad (22)$$

Esta expresión nos permite calcular los desplazamientos nodales,  $\hat{\mathbf{u}}$ , de cualquier elemento de una discretización propuesta. En segundo lugar, el vector de esfuerzos nodales elementales,  $\mathbf{S}^e$ , se obtiene,

$$\mathbf{S}^e = \mathbf{K}^e \hat{\mathbf{u}} \quad (23)$$

siendo  $\mathbf{K}^e$ , la matriz de rigidez elemental. Cuando se considera el fenómeno de rigidización dinámica, la matriz de rigidez elemental  $\mathbf{K}^e$  empleada en el cálculo del estado tensional tiene la siguiente expresión

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{K}_L^e + P\mathbf{K}_{GL}^e \quad (24)$$

siendo  $\mathbf{K}_L^e$  la matriz de rigidez elemental constante,  $\mathbf{K}_{GL}^e$  la parte constante de la matriz de rigidez geométrica y  $P$  el esfuerzo axial del elemento considerado

$$P = \frac{EA}{L^e} (u_2 - u_1) \quad (25)$$

con  $u_1$  y  $u_2$  los grados de libertad de desplazamiento axial de dicho elemento. Considerando la forma de la matriz de rigidez geométrica, expresión (8), la contribución de esta última al esfuerzo axial es nula.

La modelización del desplazamiento axial condiciona la forma de los esfuerzos axiales en la



viga. La forma del desplazamiento axial se introduce a través de los modos de deformación estáticos y dinámicos. En la selección de estos modos se emplea la técnica de síntesis modal con fronteras fijas. El modo axial estático se define como la deformada que adopta el sistema cuando se impone un desplazamiento unitario en dirección axial en el extremo del sólido flexible viga, fijando el otro extremo. Considerando las funciones de forma del elemento finito empleado en la discretización del sólido flexible viga, el modo estático axial es lineal. La modelización del problema exige la introducción de, al menos, un modo de deformación axial, ya que si no, el término no lineal de las fuerzas elásticas sería nulo. Así, el modo más sencillo de tratar el fenómeno de la rigidización geométrica es considerando un único modo lineal. Con este modelo, el esfuerzo axial obtenido es constante en toda la barra, y puede escribirse como,

$$N = EAu_{o,x} = EA\Phi_{1,x}\eta_1 = \frac{EA}{L}\eta_1 \quad (26)$$

Esta modelización permite obtener el momento flector en cualquier sección de la barra, a partir de la expresión (23) incluyendo la contribución de la matriz de rigidez lineal y geométrica. Sin embargo, no permite obtener la variación longitudinal de los esfuerzos axiales. Así, la introducción de la matriz de rigidez geométrica en la metodología DSMF permite la modelización precisa y eficiente del fenómeno de rigidización geométrica, pero la precisión en el cálculo de esfuerzos es mejorable. A continuación se efectúan dos propuestas para mejorar este campo.

### 3. PROPUESTAS DE MEJORA

#### 3.1. Aumento del número de modos axiales de deformación

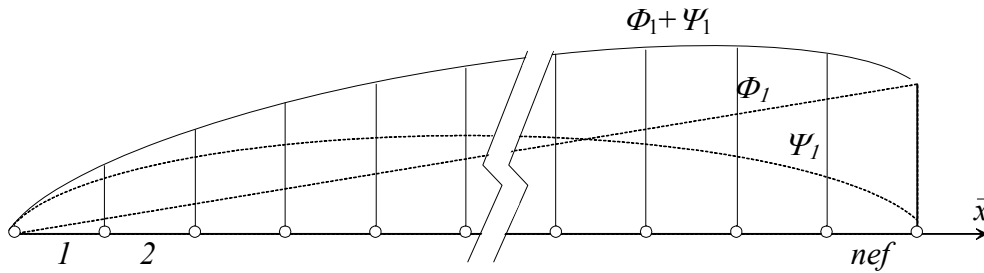


Figura 4. Campo de desplazamientos axiales en la discretización de elementos finitos.

Para conseguir una variación longitudinal más precisa del esfuerzo axial, se puede mejorar el campo de desplazamientos axiales, incluyendo modos dinámicos de deformación que completen el campo de desplazamientos axiales en el sólido flexible. Se propone la consideración de dos modos de deformación axiales, el estático, lineal, y uno dinámico, senoidal.

$$u_o = \Phi_1 \eta_1 + \Psi_1 \xi_1 \quad (27)$$

La expresión de la energía potencial se modifica en el sentido de que el factor que multiplica a al producto  $\bar{\mathbf{q}}_f^{*T} \mathbf{K}_{GLMEF}^i \bar{\mathbf{q}}_f^*$  para cada elemento de la discretización, deja de ser constante e igual para todos los elementos.

La deformación axial de cada elemento se puede obtener en función de los modos estáticos y dinámicos introducidos; así, el factor queda,

$$EA \frac{u_2^i - u_1^i}{L^i} = EA \frac{\Delta L^i}{L^i} = \frac{EA}{L^i} [\Phi_1(x_2^i) \eta_1 + \Psi_1(x_2^i) \xi_1] - \frac{EA}{L^i} [\Phi_1(x_1^i) \eta_1 + \Psi_1(x_1^i) \xi_1] \quad (28)$$

Si se divide en una parte constante y una variable,

$$EA \frac{u_2^i - u_1^i}{L^i} = EA \frac{\Delta L^i}{L^i} = EA \left[ \left( \frac{\Delta L}{L} \right)_{const} + \left( \frac{\Delta L}{L} \right)_{var} \right] = P_{const} + P_{var} \quad (29)$$

la energía potencial, comparada con la expresión (16) en la que el campo de desplazamientos axiales considerado es lineal, tiene *nef* términos adicionales.

### 3.2. Formulación foreshortening

Esta formulación permite adaptar la metodología DSMF para contemplar el movimiento de sistemas mecánicos que sufren rigidización geométrica, sin modificar las relaciones deformación-desplazamiento, es decir, planteando la energía potencial con las relaciones deformación-desplazamiento lineales. En este caso, la no linealidad geométrica se introduce a través del ‘foreshortening’ o acortamiento por flexión a la componente longitudinal de los desplazamientos elásticos. El campo de desplazamientos axiales queda:

$$u_o = s + u_{fs} = s - \frac{1}{2} \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}} (v_{o,\bar{x}})^2 d\bar{x} \quad (30)$$

donde  $u_o$  y  $v_o$  son los desplazamiento en dirección axial y transversal a la viga de los puntos del eje elástico.  $u_o$  se divide en dos componentes,  $s$  y  $u_{fs}$ . La componente  $s$  es el desplazamiento axial debido al acortamiento del eje elástico, y  $u_{fs}$  es el desplazamiento axial debido a la flexión de la viga, calculado a partir de un punto de referencia  $x_0$ :

La energía de deformación tiene la expresión:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EA (s_{,\bar{x}})^2 d\bar{x} + \frac{1}{2} \int_0^L EI (v_{o,\bar{x}\bar{x}})^2 d\bar{x} \quad (31)$$

cuya forma es la misma que en el caso lineal, cambiando únicamente el significado de  $s$ . Se considera el campo de desplazamientos propuesto en la Figura 2 para un elemento finito tipo viga, expresado en forma matricial

$$\bar{\mathbf{q}}_f^e = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \mathbf{S} \bar{\mathbf{q}}_f^{e*} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_l^e \\ \mathbf{S}_t^e \end{pmatrix} \bar{\mathbf{q}}_f^{e*} \quad (32)$$

donde  $\bar{\mathbf{q}}_f^e$  es el desplazamiento de un punto  $\bar{x}^e$  interior al elemento,  $\bar{\mathbf{q}}_f^{e*}$  son los desplazamientos de los nudos del elemento, y  $\mathbf{S}_l^e$  y  $\mathbf{S}_t^e$  son los vectores de funciones de interpolación longitudinales y transversales respectivamente. Si se añade el *foreshortening*, la expresión resultante es:

$$\bar{\mathbf{q}}_f^e = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_l^e \\ \mathbf{S}_t^e \end{pmatrix} \bar{\mathbf{q}}_f^{e*} + \begin{pmatrix} u_{fs}^e \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_{fs}^e = -\frac{1}{2} \int_0^{\bar{x}^e} (v_{0,\bar{x}^e})^2 d\bar{x}^e \quad (33)$$

donde  $u_{fs}^e$  es el acortamiento por flexión particularizado para el elemento  $e$ . Introduciendo las funciones de interpolación del desplazamiento  $v_0$ , se obtiene el desplazamiento axial por flexión, respecto al nudo inicial, de un punto interior al elemento,  $\bar{x}^e$ , en función de los desplazamientos nodales:

$$u_{fs}^e = -\frac{1}{2} \int_0^{\bar{x}^e} \bar{\mathbf{q}}_f^{e*T} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{S}_t^e}{\partial \bar{x}^e} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{S}_t^e}{\partial \bar{x}^e} \end{pmatrix} \bar{\mathbf{q}}_f^{e*} d\bar{x}^e = -\frac{1}{2} \bar{\mathbf{q}}_f^{e*T} \mathbf{H}^e \bar{\mathbf{q}}_f^{e*} \quad (34)$$

La matriz  $\mathbf{H}^e$ , que es simétrica, depende únicamente de  $\bar{x}^e$ , y puede particularizarse a los nudos, definiendo una matriz constante:

$$\mathbf{H}_L^e = \int_0^{L^e} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{S}_t^e}{\partial \bar{x}} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{S}_t^e}{\partial \bar{x}} \end{pmatrix} d\bar{x} \quad (35)$$

que permite calcular el acortamiento por *foreshortening* total sufrido por un elemento a partir de sus desplazamientos nodales lineales:

$$u_{fs}^{e*} = -\frac{1}{2} \bar{\mathbf{q}}_f^{e*T} \mathbf{H}_L^e \bar{\mathbf{q}}_f^{e*} \quad (36)$$

Si la barra está compuesta por varios elementos, el desplazamiento total debido al *foreshortening* sufrido por un nudo  $i$ , (nudo inicial del elemento  $e$ ), es la suma de los acortamientos de todos los elementos anteriores (del 1 al  $e-1$ ). Dicho desplazamiento vale para el nudo  $i$ :

$$u_{fs}^{i*} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{e-1} \bar{\mathbf{q}}_f^{j*T} \mathbf{H}_L^j \bar{\mathbf{q}}_f^{j*} \quad (37)$$

Esta ecuación se puede expresar en forma matricial para incluir el vector completo de desplazamientos nodales  $\mathbf{q}_f^*$ , denominando  $\mathbf{H}_n^i$  a la matriz total correspondiente al nudo  $i$ .

$$u_{fs}^* = -\frac{1}{2} \mathbf{q}_f^{*T} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_L^1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{H}_L^2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \mathbf{H}_L^{e-1} & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}_f^* = -\frac{1}{2} \bar{\mathbf{q}}_f^{*T} \mathbf{H}_n^i \bar{\mathbf{q}}_f^* \quad (38)$$

Así, queda completamente definido el campo de desplazamientos axiales introducido. El vector de fuerzas elásticas se deduce de la expresión de la energía de deformación. Esta formulación tiene la misma precisión que se obtiene teniendo en cuenta todos los términos al calcular la energía de deformación, pero utilizando una matriz de rigidez lineal, [5, 6].

#### 4. EJEMPLO

Se considera una viga articulada a un punto fijo en uno de sus extremos moviéndose en un plano horizontal según se indica en la Figura 5. Se desprecian los efectos de la gravedad. La viga tiene las siguientes propiedades: densidad,  $\rho = 3000 \text{ Kg/m}^3$ , módulo de elasticidad,  $E = 7.0 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ , longitud,  $L = 10 \text{ m}$ , sección,  $A = 4.0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ , momento de inercia geométrico,  $I = 2.0 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$ .

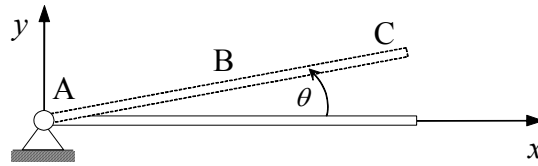


Figura 5. Viga articulada con coordenada guiada.

Se presenta la resolución del movimiento y el estado tensional del sistema, en los puntos A, B y C, sometido a la siguiente maniobra, que se introduce a través de la coordenada guiada  $\theta$ .

$$\theta(t) = \frac{w_s}{T_s} \left( \frac{t^2}{2} + \left( \frac{T_s}{2\pi} \right)^2 \left[ \cos\left( \frac{2\pi t}{T_s} \right) - 1 \right] \right) \quad 0 \leq t \leq T_s \quad (39)$$

con los siguientes parámetros:  $w_s = 6 \text{ rad/s}$  y  $T_s = 15 \text{ s}$

Es un ejemplo tipo benchmark, incluido en varios trabajos [3, 7], seleccionado para caracterizar el fenómeno de rigidización dinámica. La maniobra que describe la barra giratoria es lo suficientemente rápida para que fallen las formulaciones que emplean la expresión de la energía de deformación clásica, porque los esfuerzos axiales, debidos a las

fuerzas centrífugas, contribuyen efectivamente a disminuir las deformaciones por flexión. Para considerar este fenómeno es necesario introducir las relaciones deformación-desplazamiento no lineales, si no completas, por lo menos el término que acopla los desplazamientos axiales y de flexión. La manera más sencilla es emplear una expresión de la energía de deformación ampliada con este término, tal y como se dedujo en el apartado 2, deducida a partir de las relaciones deformación-desplazamiento no lineales.

Se efectúan tres simulaciones en las que se emplea la metodología DSMF sobre tres modelos diferentes de la barra giratoria, que se describen a continuación. La diferencia entre ellos radica en la descripción del movimiento de pequeña amplitud, responsable de la deformación en el sistema de referencia móvil, y el campo de desplazamientos axiales, que se presupone por la selección de los modos estáticos y dinámicos de deformación incluidos en el cálculo.

Modelo #1: se emplean las coordenadas típicas en elasticidad para una viga con movimiento plano en pequeñas deformaciones: los desplazamientos en las direcciones axial y perpendicular de los puntos del eje elástico y el giro del mismo respecto a la dirección perpendicular al plano del movimiento. El campo de desplazamientos axiales propuesto es lineal.

Modelo #2: se emplean las coordenadas típicas en elasticidad para una viga con movimiento plano, pero se mejora el campo de desplazamientos axiales, proponiendo la superposición de dos modos, uno estático y uno dinámico, con variación lineal y senoidal, respectivamente.

Modelo #3: se emplean como coordenadas de la viga con movimiento plano el desplazamiento en la dirección axial denominado “foreshortening”, que es el desplazamiento en la dirección longitudinal de una sección de la viga debida a la deformación por flexión del sistema. Además, se utiliza el desplazamiento en la dirección perpendicular de los puntos del eje elástico y el giro del mismo respecto a la dirección perpendicular al plano del movimiento. En este caso no es necesaria la introducción de un modo de deformación axial para modelizar el fenómeno de rigidización geométrica.

Se efectúa asimismo, una cuarta simulación de la maniobra descrita con un programa comercial de elementos finitos, COSMOS/M v2.9, que tiene como objetivo la comparación de los esfuerzos. El método de elementos finitos es una técnica de cálculo completamente distinta de la metodología DSMF, por lo que se puede usar para comparar resultados; además, es muy accesible y ampliamente empleada para el análisis de tensiones y deformaciones de sistemas estructurales; asimismo, los programas de elementos finitos en régimen dinámico no lineal contemplan automáticamente todos los efectos no lineales, incluidos los relativos a una no linealidad geométrica, por lo que los resultados de esta cuarta y última simulación se usan como referencia.

A continuación se describen los modelos.

El modelo #1. En la articulación de la barra se sitúa la base formada por el punto **p1** y los vectores **v1** y **v2**. En el extremo de la barra se define el punto **p2**. El desplazamiento local unitario en la dirección axial del punto **p2** da lugar al modo de deformación estática axial  $\Phi_1$ . El desplazamiento unitario de dicho punto en dirección perpendicular al elemento da

lugar al modo de deformación estática a flexión  $\Phi_2$ . Además, para representar con más exactitud la configuración deformada de la barra, se añaden los modos de deformación dinámicos  $\Psi_1$  y  $\Psi_2$ , que son los modos naturales de vibración a flexión de la barra con las fronteras fijas, es decir, los correspondientes a una viga empotrado-articulada. El modo axial senoidal,  $\Psi_3$ , no interviene en este modelo.

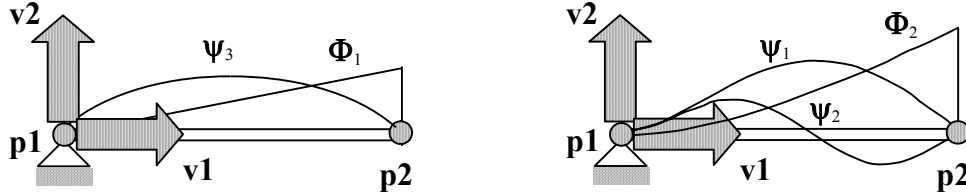


Figura 6. Modelización de una viga articulada flexible: a) modos axiales de deformación; b) modos transversales de deformación.

La forma de las funciones  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Psi_1$  y  $\Psi_2$  es conocida [8] y se representan en la Figura 6. Su expresión matemática es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= \frac{x}{L} & 0 \leq x \leq L \\
 \Phi_2 &= \frac{3}{2} \left( \frac{x}{L} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{L} \right)^3 \\
 \Psi_1 &= \sin \left( \beta_{11} \frac{x}{L} \right) - \text{Sh} \left( \beta_{11} \frac{x}{L} \right) + \alpha_1 \left[ \text{Ch} \left( \beta_{11} \frac{x}{L} \right) - \cos \left( \beta_{11} \frac{x}{L} \right) \right] & \beta_{11} = 3.926602 \quad \alpha_1 = \frac{\sin(\beta_{11}) - \text{Sh}(\beta_{11})}{\cos(\beta_{11}) - \text{Ch}(\beta_{11})} \\
 \Psi_2 &= \sin \left( \beta_{12} \frac{x}{L} \right) - \text{Sh} \left( \beta_{12} \frac{x}{L} \right) + \alpha_2 \left[ \text{Ch} \left( \beta_{12} \frac{x}{L} \right) - \cos \left( \beta_{12} \frac{x}{L} \right) \right] & \beta_{12} = 7.068583 \quad \alpha_2 = \frac{\sin(\beta_{12}) - \text{Sh}(\beta_{12})}{\cos(\beta_{12}) - \text{Ch}(\beta_{12})}
 \end{aligned} \tag{40}$$

En este modelo se ha incluido un único modo lineal de deformación axial que es el modo más sencillo que permite caracterizar el movimiento del sistema propuesto en este ejemplo. La selección de los modos de vibración de flexión es debida a que el sistema considerado, bajo la carga descrita, es suficientemente esbelto como para tener un comportamiento de viga plana de Euler-Bernouilli, pudiendo despreciarse la energía de deformación por cortante.

Así, el vector de variables del problema queda:

$$\mathbf{q}^T = \left[ \theta \quad v1_x \quad v1_y \quad v2_x \quad v2_y \quad \eta_1 \quad \eta_2 \quad \xi_1 \quad \xi_2 \quad p2_x \quad p2_y \right] \tag{41}$$

donde  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ,  $\xi_1$  y  $\xi_2$  son las amplitudes de los modos estáticos y dinámicos, respectivamente. Por tanto, el número total de variables es 11, de las que sólo 5 son independientes.

En cada instante de tiempo, la deformación del sistema queda determinada por el producto de los modos de deformación descritos multiplicados por las amplitudes correspondientes. La energía de deformación expresada en función de las amplitudes de los modos de deformación queda:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EA (\Phi_1' \eta_1)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI (\Phi_2'' \eta_2 + \Psi_1'' \xi_1 + \Psi_1'' \xi_2)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EA \Phi_1' \eta_1 (\Phi_2' \eta_2 + \Psi_1' \xi_1 + \Psi_1' \xi_2)^2 dx \quad (42)$$

Así, la energía de deformación del sistema puede ser expresada en forma matricial como,

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{q}_e^T \mathbf{K}_L \mathbf{q}_e + \frac{1}{2} \mathbf{q}_e^T \mathbf{K}_G \mathbf{q}_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}_e^T \mathbf{K} \mathbf{q}_e \quad (43)$$

siendo  $\mathbf{q}_e$  el vector que contiene las coordenadas elásticas (amplitudes modales) y  $\mathbf{K}$  la matriz de rigidez condensada a los modos, que está formada por dos términos: la matriz de rigidez constante y la matriz de rigidez geométrica, que es lineal con respecto a la coordenada elástica  $\eta_1$ . Si los modos de deformación se introducen mediante las funciones teóricas conocidas mostradas en la expresión (40), los términos de estas matrices,  $\mathbf{K}_L$  y  $\mathbf{K}_G$ , y por tanto, la matriz de rigidez condensada a los modos,  $\mathbf{K}$ , se puede obtener en una fase de preproceso.

El modelo #2 queda reflejado en la Figura 6; mejora el campo de desplazamientos axiales,  $u_o$ , del modelo #1, introduciendo, adicionalmente, un modo dinámico de deformación senoidal, que se representa en dirección perpendicular a la viga en dicha figura junto con el modo axial lineal. El campo de desplazamientos  $v_o$ , es el mismo en ambos modelos, y por tanto, no se representa.

$$\psi_3 = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (44)$$

En el modelo #3 no se introduce ningún campo de desplazamientos axiales. Se emplean tres modos de deformación transversal, uno estático,  $\Phi_2$ , y dos dinámicos,  $\Psi_1$  y  $\Psi_2$ . Estas funciones son las mismas que las mencionadas para el modelo #1.

Para la cuarta simulación, con el método de elementos finitos, se emplea el modelo EF, consistente en una malla de diez elementos viga bidimensional (BEAM2D), de igual longitud, con tres grados de libertad por nudo: los dos desplazamientos en el plano y el giro perpendicular al mismo. Las condiciones de contorno consisten en imponer traslaciones nulas en el primer nudo, que es fijo. El programa permite asociar el grado de libertad giro del primer nudo del primer elemento, a una curva temporal, definida por la expresión (39); esto permite guiar cinemáticamente la viga.

Se realiza un análisis dinámico no lineal con control en fuerzas, empleando el código comercial COSMOS/M 2.9. Las ecuaciones dinámicas de equilibrio se integran utilizando el método de Newmark, con parámetros  $\delta=0.5$  y  $\alpha=0.5625$ , para introducir un ligero amortiguamiento numérico que reduce parte de la inestabilidad de la solución. Como procedimiento iterativo se emplea el método de Newton-Raphson, calculando la matriz de

rigidez del sistema en cada iteración, dentro de cada paso.

Los resultados de la simulación efectuada con el modelo #1 se comparan con los obtenidos en [3], para constatar la extensión sencilla y eficiente de la metodología DSMF al tratamiento del fenómeno de la rigidización geométrica, incluyendo la matriz de rigidez geométrica. En la Figura 7 se presentan los desplazamientos del extremo de la viga,  $v_o$ , para los tres modelos.

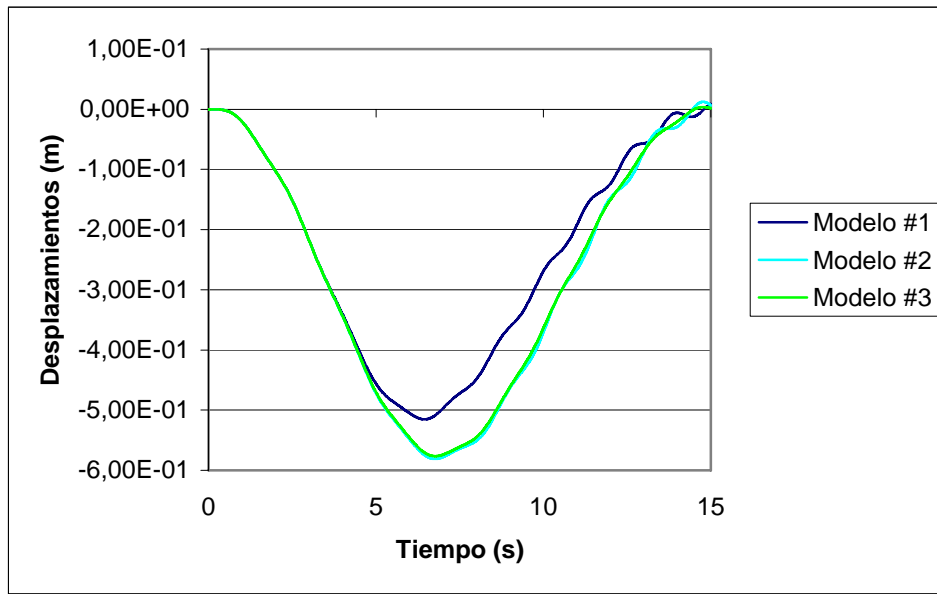


Figura 7. Desplazamiento elástico  $v_o$  del extremo de la viga.

En la Figura 8 se pueden observar tres gráficas de los esfuerzos axiales sufridos por la viga en los puntos A, B, y C, que son el punto de unión con la articulación, el punto medio de la barra y extremo libre respectivamente. En cada una de las gráficas se exponen los resultados de los modelos descritos, en las cuatro simulaciones de 15 segundos de duración. Se observa que los máximos se producen en el punto A.

El modelo #1, produce un esfuerzo constante en toda la viga, por lo que se ve la misma función en las tres gráficas. Observando su variación a lo largo del tiempo en cualquiera de las tres gráficas, se puede ver claramente el fenómeno de rigidización dinámica, en el sentido de cómo los esfuerzos axiales se van incrementando a medida que la viga va girando más rápido, estabilizándose cuando se alcanza la velocidad de funcionamiento de 6 rad/s.

El modelo #2 mejora los resultados del modelo #1. En la Figura 8 se puede observar la variación longitudinal del esfuerzo axial en los puntos A, B y C; los resultados se acercan más a los producidos por la simulación de elementos finitos. El modelo #3 no produce esfuerzos axiales, porque no se introducen modos de deformación axial.

Todos los modelos debieran dar esfuerzo axial nulo en el punto C. No ocurre esto en el modelo #1 porque el esfuerzo que produce es constante en toda la viga, incluido el



extremo libre; El modelo #2 da un valor mucho más cercano al valor teórico nulo, porque introduce una aproximación mejor de los desplazamientos axiales. El modelo de elementos finitos, modelo EF, tampoco produce esfuerzo axial nulo por considerar masas concentradas en nudos. En el último elemento las fuerzas de inercia axiales provocan un esfuerzo axial.

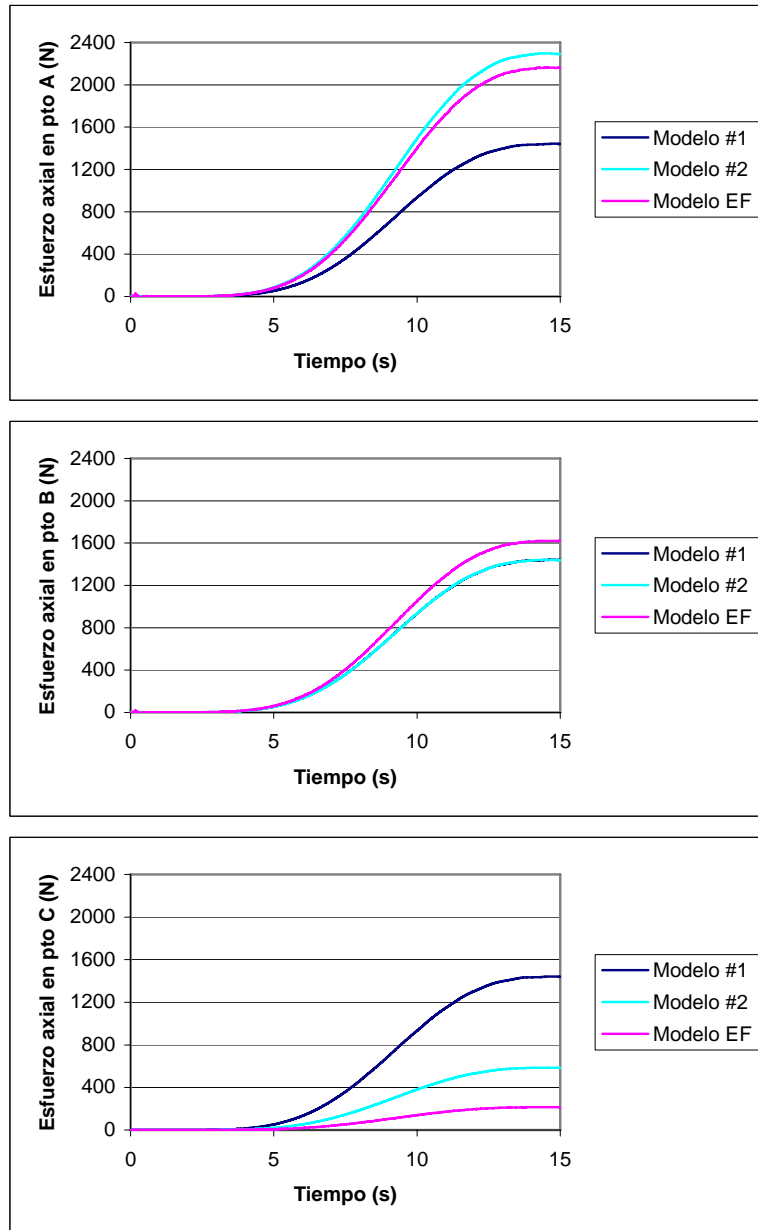


Figura 8. Esfuerzos axiales en los puntos A, B y C de la viga.

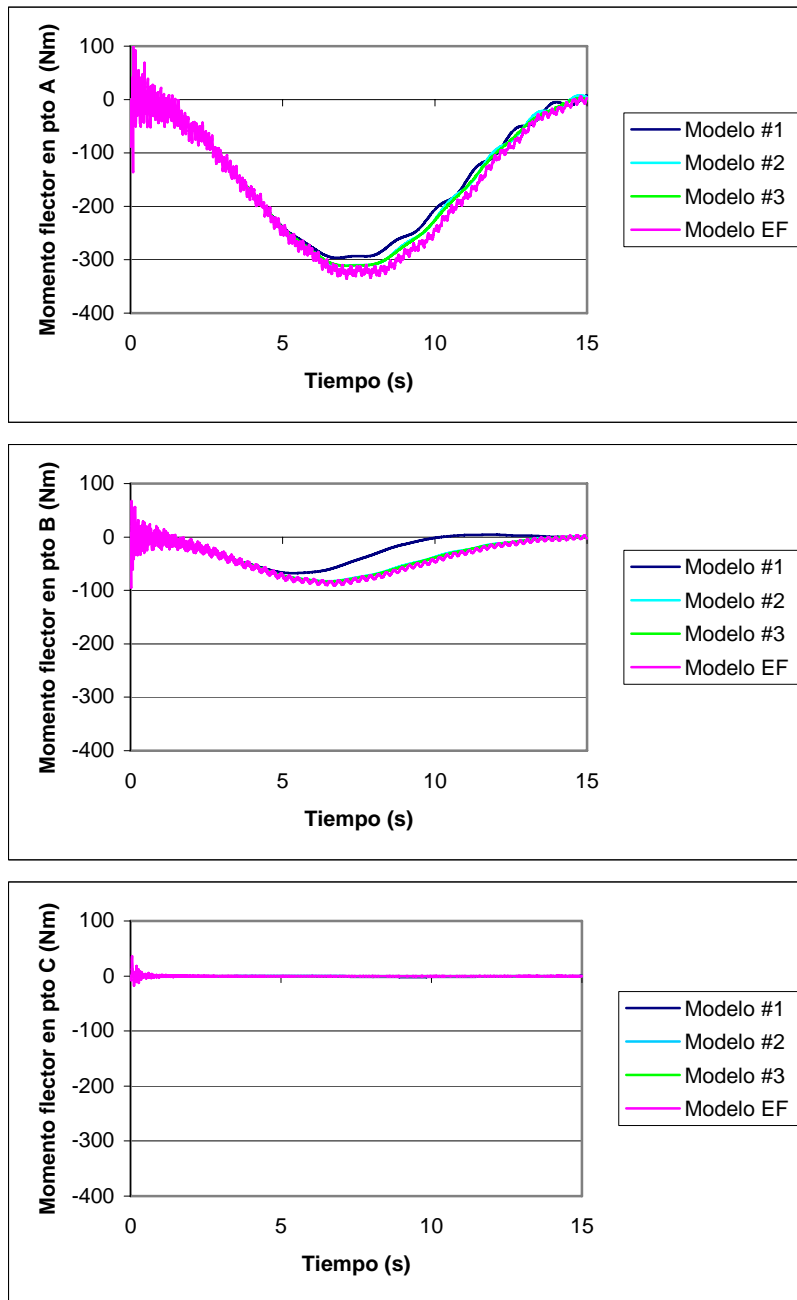


Figura 9. Momentos flectores en los puntos A, B y C de la viga.

Los resultados de momento flector se muestran en la Figura 9. Las tres gráficas corresponden a los puntos A, B y C de la viga. En cada gráfica se muestran los flectores de los cuatro modelos descritos. Los máximos se producen en A. En este caso, los flectores predichos por todos los modelos se anulan en C.

El tiempo de CPU empleado por cada uno de los modelos se muestra en la siguiente tabla.

Modelo	Tiempo CPU (s)
Modelo #1	11.03
Modelo #2	12.96
Modelo #3	10.13
Modelo EF	357.00

Tabla 1. Tiempos de CPU empleados en las simulaciones.

## 5. CONCLUSIONES

- Los tres modelos empleados permiten la modelización del fenómeno de rigidización geométrica. En este trabajo se ha analizado la precisión de los esfuerzos que se pueden obtener con cada uno de ellos y la eficiencia de las simulaciones efectuadas.
- El modelo #1 permite el cálculo de diagramas de momentos flectores del sistema en cada paso de tiempo. En la caracterización del fenómeno de rigidización geométrica, el término de acoplamiento entre los desplazamientos en dirección axial y transversal es decisivo. Así, el modelo #2 mejora la precisión de los momentos flectores al completar el campo de desplazamientos axiales. Dicho modelo también permite mayor precisión en el cálculo de los esfuerzos axiales, obteniendo una variación a lo largo del eje longitudinal de la barra acorde con los esfuerzos axiales que provocan las fuerzas de inercia centrífugas en la dirección axial por el giro de la barra respecto de uno de sus extremos considerado fijo.
- El modelo #3 no permite el cálculo de esfuerzos axiales, ya que no introduce ningún campo axial de deformación, pero permite el cálculo de momentos flectores con una precisión similar a la del modelo #2.
- Con respecto a la eficiencia, los tres modelos ensayados son muy eficientes, efectuando la simulación de 15 segundos de duración en un tiempo por debajo del tiempo real, sobre un ordenador personal convencional, siendo el modelo #3 el más eficiente. En este aspecto, la diferencia con respecto a los métodos globales es importante, y crece con la complejidad del sistema simulado, representando una ventaja comparativa de cara a tareas como el diseño de este tipo de sistemas, donde el estado tensional en condiciones de funcionamiento resulta importante.
- Resumiendo, el modelo #1 es la forma más sencilla de incluir el fenómeno de rigidización geométrica; da resultados precisos en un gran número de casos, aunque no permite la obtención de esfuerzos axiales con precisión. El modelo #2 incluye un mayor número de modos de deformación, permitiendo una caracterización más precisa del fenómeno y mejorando explícitamente el campo de esfuerzos axiales respecto del anterior. El modelo #3 es una forma menos sistemática de introducir dicho fenómeno, aunque tan precisa como el modelo #2 y más eficiente; sin embargo, para obtener esfuerzos axiales sería necesario introducir modificaciones adicionales pueden afectar al tiempo de cálculo.

## 6. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado en el contexto del proyecto DPI2003-05547C0201 Financiado por el MCYT y del incentivo al mismo PGIDIT04PXIC16601PN aportado por la Secretaría General de I+D de la Xunta de Galicia.

## REFERENCIAS

- [1] Cuadrado J., Gutierrez R., Naya M.A. and Morer P., "A comparison in terms of accuracy and efficiency between a MBS dynamic formulation with stress analysis and a non-linear FEA code, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **51**(9), pp. 1033-1052, (2001).
- [2] Kane T.R., Ryan R.R., and Banerjee A.K. Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base. *Journal of Guidance and Control* **10**:139-151, 1987.
- [3] Sharf I. Geometrically non-linear beam element for dynamics simulation of multibody systems. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **39**:763-786, 1996
- [4] Mayo J., Domínguez J. and Shabana A.A. Geometrically non-linear formulations of beams in flexible multibody dynamics. *Journal of Vibrations and Acoustics*, **117**:501-509, 1995.
- [5] Mayo J. and Domínguez J. Geometrically non-linear formulations of flexible multibody systems in terms of beams elements: geometric stiffness. *Computers and Structures*, **59**:1039-1050, 1996.
- [6] Mayo J.M., Garcia-Vallejo D. and Dominguez J. Study of the geometric stiffening effect: Comparison of different formulations. *Multibody Syst. Dyn.* **11**(4):321-341, 2004.
- [7] Avello A., 1995. Simulación dinámica interactiva de mecanismos flexibles con pequeñas deformaciones. Tesis Doctoral, Universidad de Navarra, España.
- [8] Rao S.S. *Mechanical Vibrations*. Third Edition. Addison-Wesley Publishing Company. Reading, Massachusetts, 1995.